

Rapport Fusée expérimentale

FX28 – Prométhée



- ESO (ESTACA SPACE ODYSSEY) –

C'Space 2022

Auteurs :

- Antoine LUNVEN
- Thomas MAYNADIE
- Francisco THIONVILLE
- Hugo TEIXEIRA
- Tom GIRIBONE

Liste des membres

Membre	Rôle	Promo
Julien LEGER	Chef de projet / Pôle Récupération	4A
Thomas MAYNADIE	Responsable Pôle Expérience	4A
Dylan PERINETTI	Pôle Expérience	1A
Baptiste VIGNON	Pôle Expérience	4A
Flavien TEYSSOU	Pôle Expérience	4A
Goulven PERHIRIN	Pôle Expérience	4A
Tom GIRIBONE	Responsable Pôle Minuterie	3A
Rebecca STANCIU	Pôle Minuterie	4A
Francisco THIONVILLE	Responsable Pôle Mécanique	4A
Hugo TEIXEIRA	Pôle Mécanique	2A
Nicolas QUETGLAS	Pôle Mécanique	4A
Julien LEBLOND	Pôle Mécanique	4A
Antoine LUNVEN	Pôle Mécanique / Récupération	3A
Maxime ARNAUD	Pôle Récupération	4A
Alexis GORLIER	Pôle Récupération	4A

Avant-Propos

Ce rapport a été créé avec un double objectif. D'une part, ce document réuni toutes les informations nécessaires à Planet Sciences et au CNES pour qualifier le projet FX28 – Prométhée ainsi que les résultats à la suite de la campagne de lancement. D'autre part, ce document présente des conseils issus du retour d'expérience du projet qui seront utiles pour les futurs projets de l'ESO. En effet, la transmission des connaissances est une des priorités de cette association. C'est pourquoi ce fichier rassemble l'ensemble des conseils / ordres de grandeur que nous aurions aimé avoir au début de notre projet.

REMERCIEMENTS

Toute l'équipe Prométhée tient à adresser des remerciements sincères auprès de l'ensemble des bénévoles de Planète Sciences, dont l'aide a été précieuse lors du C'Space.

Sommaire

Liste des membres.....	2
Avant-Propos	3
Sommaire	4
Liste des abréviations	6
Introduction.....	7
I.- Généralités.....	8
1. Présentation de l'association	8
2. Genèse du projet.....	8
II.- Conception mécanique	9
1. Dimensionnement de la Fusex	9
2. Fabrication de la peau	9
3. Conception des bagues	11
4. Conception de la coiffe.....	12
5. Les patins	15
6. Conception des ailerons	16
6.1. Calcul du centre de masse	16
6.1. Fabrication des ailerons	18
III.- Récupération.....	19
1. Système de largage du parachute	19
2. Conception du parachute	21
IV.- Systèmes électronique	24
1. Conception de la minuterie	24
2. Conception du rack de la minuterie	27
3. Conception du circuit de puissance de la récupération	28
4. Liste des composants	29
4.1. Liste du matériel de la minuterie	29
4.2. Liste du matériel du circuit de puissance du système de récupération	30
V.- Expérience	31
1. Organisation du pôle	31
2. Théorie.....	32
2.1. Principes fondamentaux de la navigation inertielle	32
2.2. Formulation du modèle dynamique de la Fusex.....	34
2.3. Le Filtre de Kalman Etendu (EKF).....	36

2.4.	<i>Modèle de la Fusée expérimentale</i>	38
2.5.	<i>Matrices de covariance</i>	47
3.	Simulation de la trajectoire de la Fusex	48
3.1.	<i>Modèle d'évolution</i>	48
3.2.	<i>Modèle de poussée</i>	49
3.3.	<i>Modèle aérodynamique</i>	50
3.4.	<i>Résultats</i>	52
4.	Système embarqué de mesure	58
4.1.	<i>Système électronique</i>	58
4.2.	<i>Logiciel embarqué</i>	60
4.3.	<i>Problèmes de conception et pistes d'amélioration</i>	61
5.	Analyse des mesures obtenues lors du lancement	62
5.1.	<i>Filtre de Kalman Etendu (Altitude)</i>	62
5.2.	<i>Données de vol</i>	63
5.3.	<i>Résultats</i>	69
5.4.	<i>Discussions et améliorations</i>	70
	VI.- Tests et validation	71
	VII.- Campagne de lancement	73
1.	<i>La chronologie</i>	73
2.	<i>Quelques images</i>	75
	Conclusion	76
	Annexes	77

Liste des abréviations

CNES : Centre National d'Etudes Spatiales

ESO : ESTACA Space Odyssey

EKF : *Extended Kalman Filter* (Filtre de Kalman étendu)

Fusex : Fusée Expérimentale

Minif : Minifusée

IMU : *Inertial Measurement Unit* (Centrale Inertielle)

KF : *Kalman Filter* (Filtre de Kalman)

Introduction

Ce rapport possède pour objectif la synthèse de la démarche de conception ainsi que les résultats du projet de fusée expérimentale « Prométhée » mené par l'association étudiante *Estaca Space Odyssey (ESO)*. Le lancement de la fusée expérimentale fut effectué le 21 juillet 2022 lors de la campagne de lancement C'Space 2022 (coorganisée par Planète Sciences et le CNES) sur le terrain du 1^{er} Régiment des Hussards Parachutiste et a donné lieu à un vol nominal.

L'expérience menée à bord de Prométhée consistait à concevoir et tester un prototype de module de Navigation permettant la reconstruction de la trajectoire de la Fusée. L'objectif initial consistait à réaliser un module fonctionnant en temps réel, mais les pénuries de composants nous ont contraint à conduire les tests au sol après récupération des données. Le défi majeur de cette expérience était la maximisation des performances du système de navigation par la fusion de mesures en provenance de capteurs low-costs (fortement biaisés et bruités) à l'aide d'un filtre de Kalman étendu (EKF).

Le projet Prométhée a été créé lors de la rentrée de l'année universitaire 2020-2021 par le bureau de l'ESO, l'association de passionnés du spatial à l'ESTACA, avec le but de proposer un projet de fusée expérimentale aux membres de l'association. À la suite de nombreux imprévus causés par la crise sanitaire, le projet n'a pas abouti. C'est dans ce cadre que le projet Prométhée a été repris par de nouveaux membres pour l'année universitaire 2021-2022.

Le bureau de l'ESO souhaitant profiter d'un lancement afin de tester certains sous-systèmes liés à l'ambitieux projet « Fusée Sonde » mené par l'association depuis plusieurs années, il était prévu de tester en parallèle un système de récupération par double parachute. Malheureusement, les délais ainsi que le manque de personnel impliqué nous a conduit à abandonner cet objectif.

I.- Généralités

1. Présentation de l'association

L'ESO est une association loi 1901 qui a pour objectif de promouvoir l'activité aérospatiale au sein de l'école et auprès du grand public. Elle réunit les passionnés de ce secteur en proposant différents projets de conception, fabrication et lancement de fusées notamment lors du C'Space, évènement organisé par Planète Sciences et le CNES. L'association propose aussi différentes activités pour faire rêver les membres et les élèves de l'ESTACA comme des conférences ou des tables rondes avec des personnalités du secteur aérospatial.

Depuis sa fondation en 1991, l'association a réalisé une trentaine de projets dans les campus de Laval et de Saint Quentin en Yvelines. Dans ces projets nous pouvons citer les ballons, les minifusées et les fusées expérimentales, ces deux derniers étant l'activité principale de l'association.

C'est donc dans cette lignée que se situe le projet *Prométhée*.

2. Genèse du projet

Prométhée est une fusée expérimentale, mono-étage, de 2.10m de haut pour un diamètre de 110mm. Elle a été conçue, fabriquée et lancée par les membres de l'ESO du campus de Saint Quentin en Yvelines. Cette fusée utilise le propulseur Pro54 de la société CTI qui est fourni lors du C'Space par le CNES et Planète Sciences.

L'organisation à suivre lors de la réalisation d'une fusée expérimentale est la suivante :

- Définir l'expérience ainsi que son encombrement afin de choisir le diamètre de la fusée.
- Réaliser un schéma de la fusée, donnant les ordres de grandeur pour la longueur et la position de chaque système.



- Réaliser une CAO complète de la fusée
- Conception conjointe de la minuterie et du dispositif de récupération
- Conception de l'expérience
- Fabrication de la peau de la fusée et des bagues
- Fabrication du dispositif de récupération
- Fabrication des racks de l'expérience et de la minuterie
- Usinage des patins
- Fabrication du parachute
- Fabrication et fixation des ailerons sur la fusée
- Intégration de l'ensemble des éléments

II.- Conception mécanique

1. Dimensionnement de la Fusée

La première étape dans la conception de la structure de notre Fusée a été de choisir les dimensions de notre fusée. En effet, nous avons fabriqué la peau en fibre de carbone, matériau résistant, très utilisé au sein de l'association. Cette méthode de fabrication nécessite l'utilisation d'un moule, autour duquel la fibre de carbone est enroulée (le principe de fabrication sera détaillé dans la partie suivante). Le moule utilisé étant un tube PVC, nous devons donc nous limiter aux diamètres proposés par les fabricants. Après un échange avec le pôle expérience, le diamètre de 110 mm a été choisi.

Nous avons ensuite divisé la peau de notre fusée en trois parties : la partie propulsion, la partie récupération - minuterie et la partie expérience. Les dimensions choisies pour ces différentes parties sont présentées sur la figure suivante :

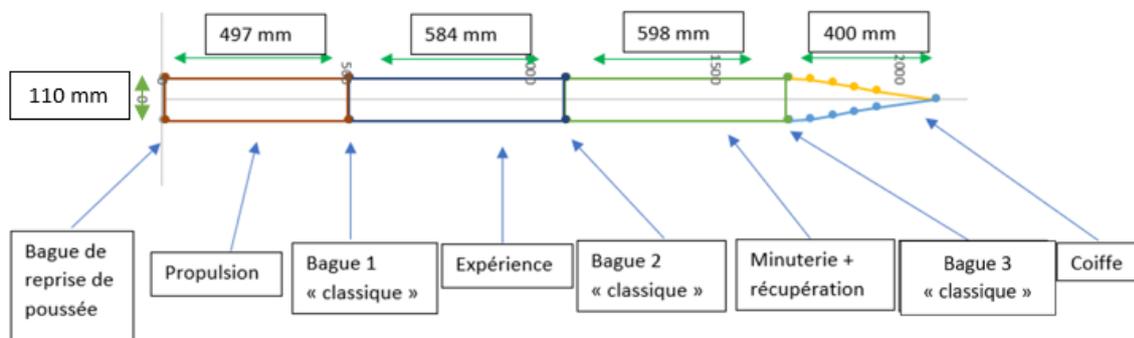


Figure 2.1 : Dimensionnement de la Fusée

2. Fabrication de la peau

Le principe de fabrication d'une peau est simple mais nécessite de la pratique afin d'éviter les plis et supprimer les bulles d'air.

Les matériaux nécessaires sont : fibre de carbone, tube PVC, résine et durcisseur pour le mélange d'époxy. Etant limité par la longueur du tube PVC, nous avons fabriqué la peau en 2 parties : une pour l'ensemble propulsion / expérience, qui sera coupé en deux ultérieurement et une deuxième pour la minuterie / récupération. Pour obtenir une rigidité suffisante, nous avons enroulé 4 couches de carbone. Voici les dimensions utilisées :

Partie propulsion + récupération	1200 x 1400 mm
Partie expérience	600 x 1400 mm

Nous avons utilisé 37g de durcisseur et 100g de résine pour 100g de fibre. Voici un tableau réunissant les différentes masses utilisées :

Partie propulsion + récupération	Partie expérience
----------------------------------	-------------------

Masse de fibre de carbone	464g	191g
Masse de résine	464g	191g
Masse de durcisseur	$464 \times 0,37 = 172g$	$191 \times 0,37 = 71g$

Pour faciliter le démoulage, du papier sulfurisé est enroulé autour du tube PVC. La fibre de carbone est ensuite imprégnée de résine à mesure qu'elle est enroulée. Une dernière couche de papier sulfurisé est ajoutée par-dessus la fibre de carbone pour permettre de lisser le tube.

Après avoir séché pendant 48h, les peaux sont prêtes pour le démoulage.

Voici un document récapitulatif de l'ensemble des étapes à suivre pour la fabrication d'une peau :

Créé le : 02.12.2019

Par : Manon Bordeau

FABRICATION PEAU EN FIBRE DE VERRE

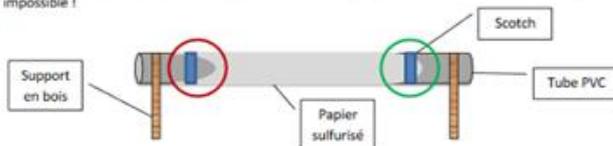
1. DECOUPER LA FIBRE NECESSAIRE

	Largeur	Longueur
Indications	Plus grande que la largeur nécessaire, tout en laissant une marge pour le démoulage	De quoi faire 3 fois le tour du tube au minimum
Formule		$l = 3 \times 2\pi R = 3 \times \pi d$
Résultat	$L =$ mm	$l =$ mm

Choisir un ciseau qui coupe bien et limiter un maximum les fibres qui sortent

2. PROTEGER LE TUBE

Enrouler tout le tube de papier sulfurisé (ou téflon) et le fixer de chaque côté du tube avec du scotch. Faire attention de ne pas laisser de trous car si de l'époxy vient sur le tube, le démoulage sera impossible !



3. PREPARER L'EPOXY

Mettre des équipements de protection (EPI) :

- Gants
- Blouse

Protéger également la table avec des cartons

Etapes	Calculs	Résultats
Peser la fibre de verre		$M_{fibre} =$ g
Calculer la masse de résine à verser	$M_{résine} = M_{fibre}$	$M_{résine} =$ g
Calculer la masse de durcisseur à verser	$M_{durcisseur} = 0,37 \times M_{résine}$	$M_{durcisseur} =$ g
Verser la résine		
Verser le durcisseur		
Mélanger sans s'arrêter pendant toute la durée de fabrication de la peau		

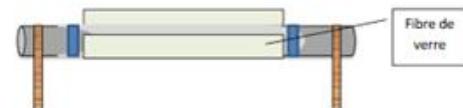
Poser 100g de fibre :



ERREUR A EVITER : Utiliser moins de résine que ce qui est indiqué sur le guide mini fusées (20% en moins). Cela permettra de ne pas avoir une surcouche de résine sur le carbone.

4. ENROULER LA FIBRE AUTOUR DU TUBE

- Commencer par coller l'extrémité du tube sur le papier sulfurisé avec un peu d'époxy (on peut choisir d'utiliser des pinceaux ou simplement à la main). Il sera plus simple de lisser le tube avec la main plutôt que les pinceaux
- Enrouler la fibre autour du tube en veillant à mettre de la colle partout. Ne pas mettre trop de colle mais ne pas laisser des zones sans colle. Toujours appliquer la colle dans le sens de l'enroulement pour lisser le tube et éviter les bulles ou plis.
- Optionnel : une fois toute la fibre enroulée, mettre du papier cuisson (ou téflon) autour pour permettre de lisser le tube.



5. LAISSER SECHER 24H MINIMUM

6. DEMOULAGE
7. COUPE

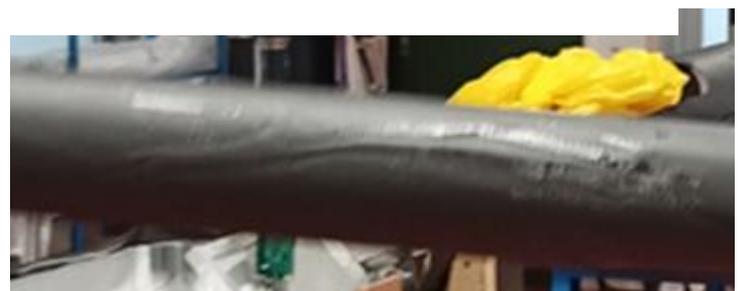
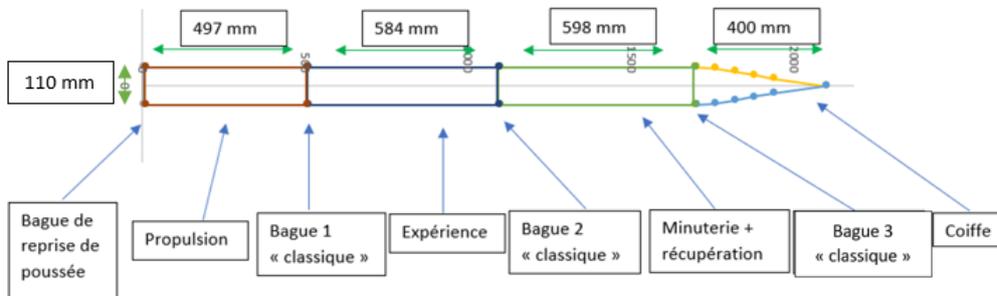


Figure 1.2 : Surcouche de résine

3. Conception des bagues

Pour assurer l'assemblage des différentes peaux, il est nécessaire de fabriquer des bagues. Elles peuvent être usinées en aluminium au laboratoire de l'ESTACA. La structure principale de notre fusée étant divisée en trois parties, nous utilisons 3 bagues « inter-étage », comme indiqué sur l'image suivante :



Finalement, nous avons usiné une bague de reprise de poussée et deux anneaux de centrage pour maintenir le propulseur à l'intérieur de notre fusée.

Le propulseur utilisé permet deux types de fixation pour la reprise de poussée. Elle peut être assurée par une bague se situant au-dessus du propulseur ou en dessous. Nous avons fait le choix d'assurer la reprise de poussée par le bas.

Voici les dimensions des trois types de bagues utilisées :

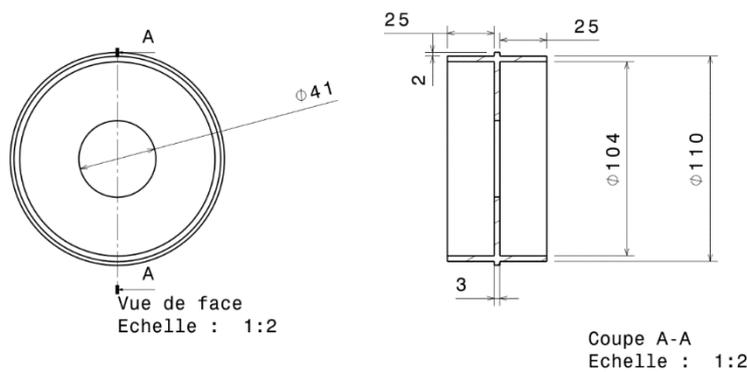


Figure 2.2 : Bague inter-étage

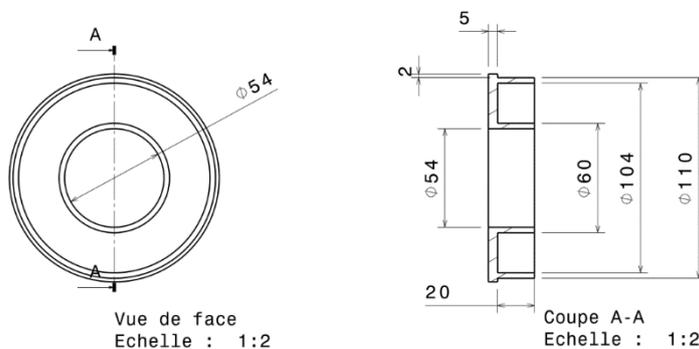


Figure 2.3 : Bague de reprise de poussée

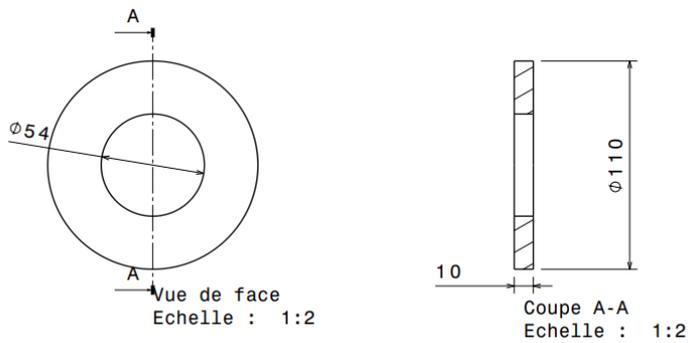


Figure 2.4 : Anneau de centrage

4. Conception de la coiffe

La coiffe est un élément essentiel pour l'aérodynamisme de la fusée. Elle peut être conçue de deux manières différentes : par impression 3D en PLA (Acide polylactique) ou en fibre de carbone par moulage. Nous avons choisi l'impression 3D car cela nous laissait plus libre sur le choix de la forme de l'ogive. Nous avons choisi de faire une ogive gothique tangente.

Lors de la conception d'une coiffe, il est important de respecter le ratio L/D (Longueur sur diamètre) de l'ogive. Il doit être compris entre 3 et 5, idéalement 4. Nous avons choisi une ogive de 400mm, soit un rapport d'environ 3.64 (le diamètre est de 110mm).

L'imprimante 3D du FabLab ne peut imprimer que des objets de moins de 30cm de hauteur, nous avons dû scinder la coiffe en deux parties. Pour ce faire, nous nous sommes inspirés de l'ogive d'Aeris II dont les deux parties peuvent s'emboîter et sont maintenues grâce à une tige filetée.

Finalement, l'ogive a été imprimée en blanc, pour des questions de résistance à la chaleur. En effet nous craignons que les fortes chaleur de la région de Tarbes ne fassent fondre l'ogive si elle avait été noire.

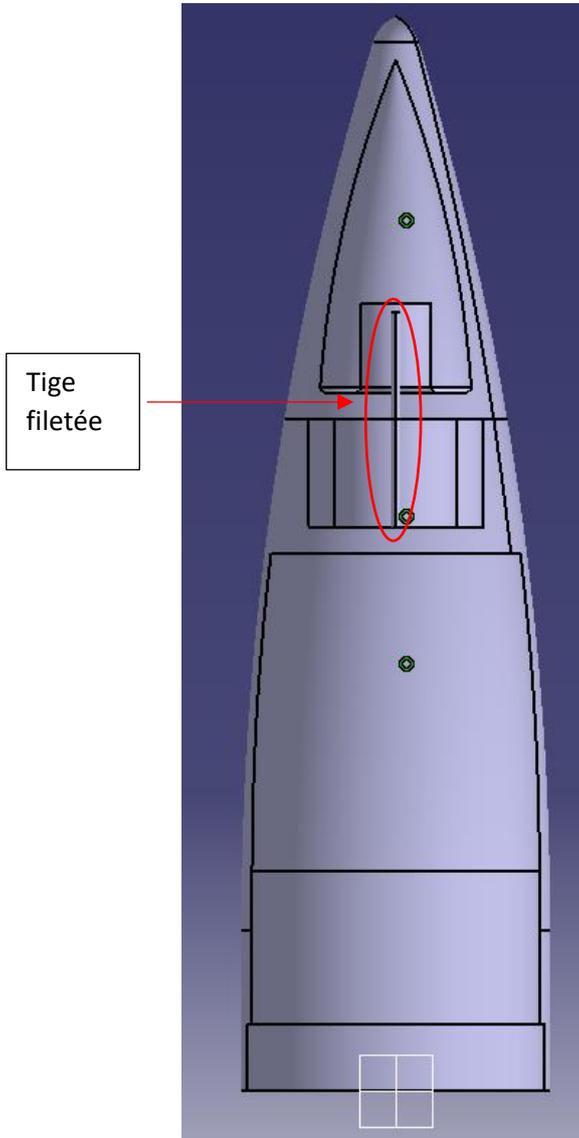


Figure 2.5 : Modèle CAO de la coiffe

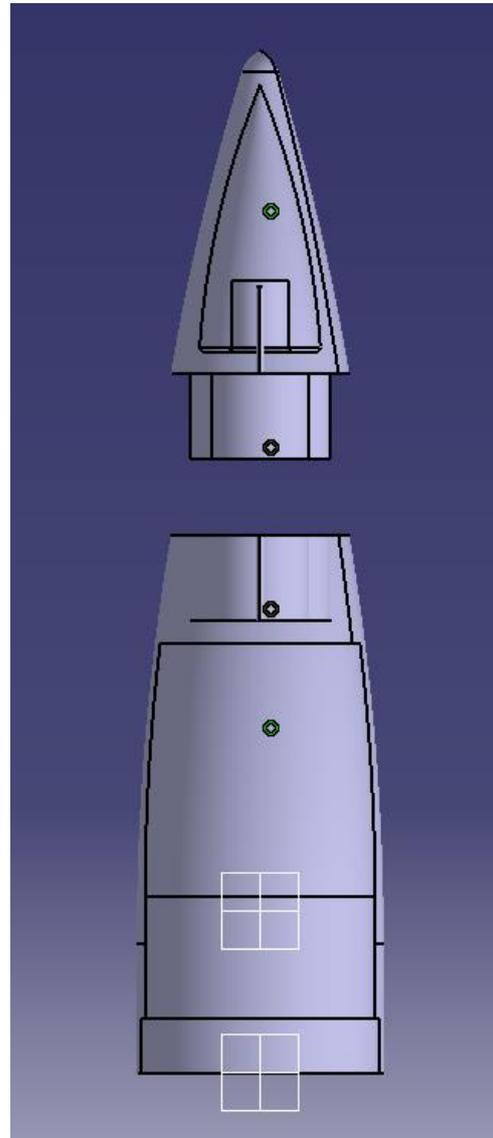
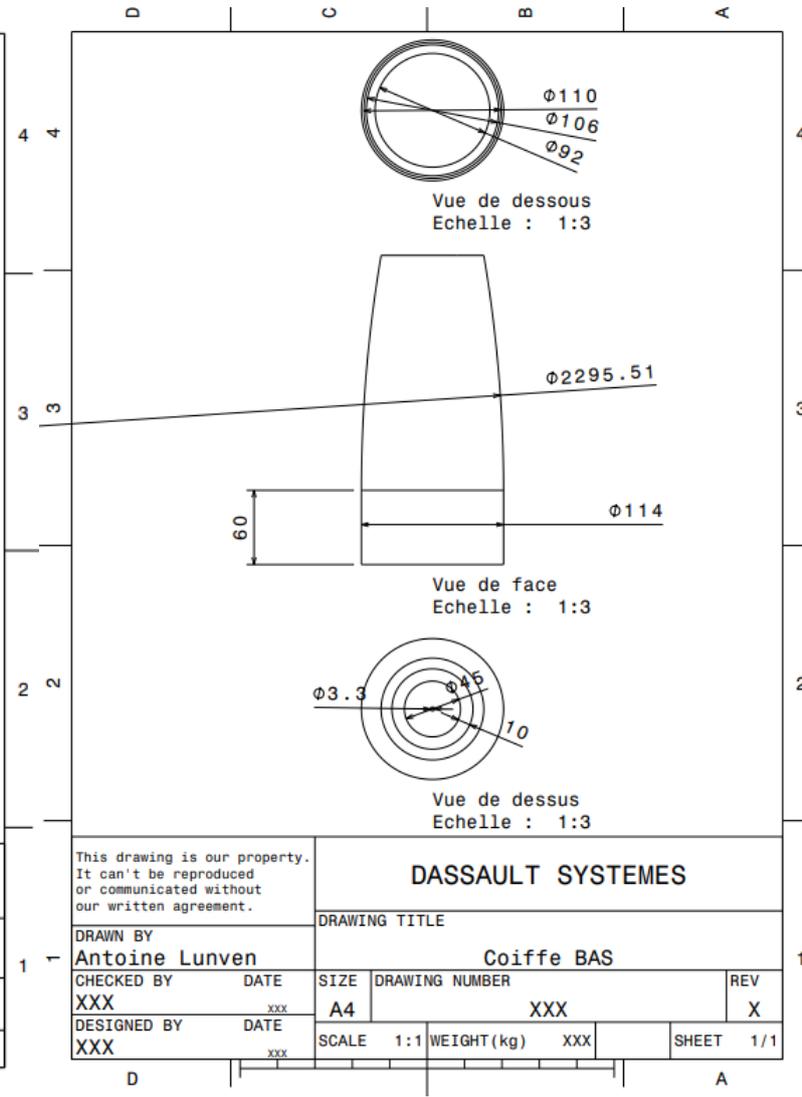
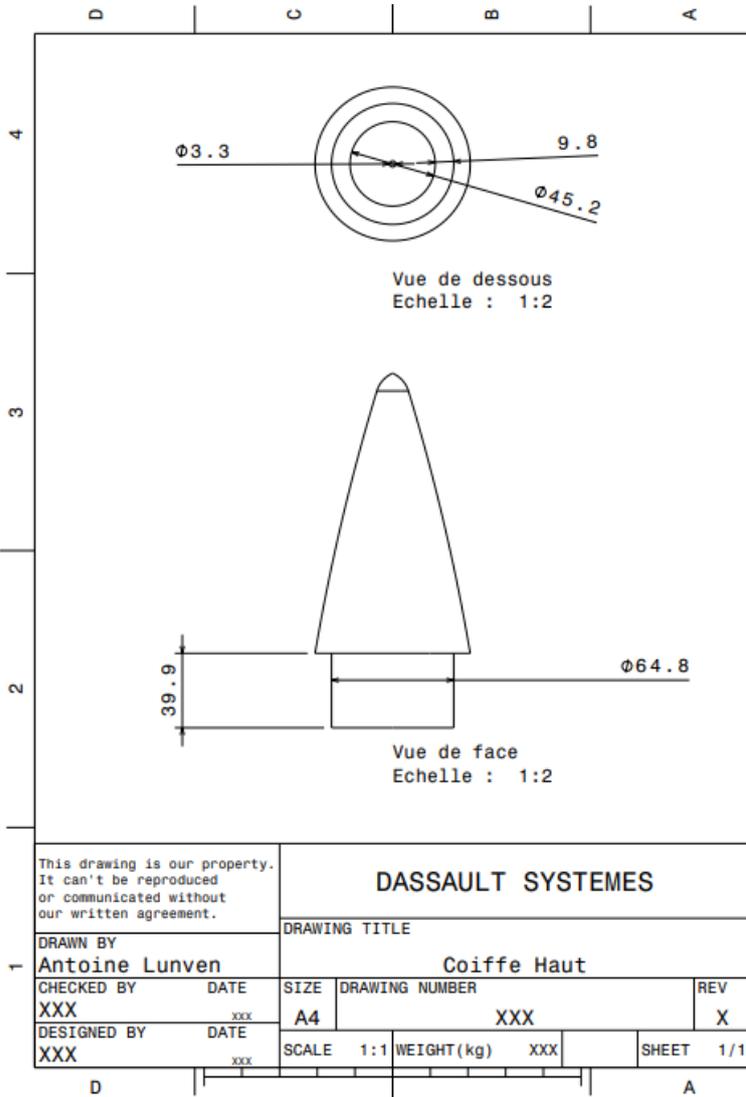


Figure 2.6 : Modèle CAO de la coiffe non assemblée



5. Les patins

Il existe 2 types de rampe :

- La rampe rail (celle que nous avons utilisé)
- La rampe cage (guidage des ailerons)

Afin d'utiliser une rampe rail, il est nécessaire de fabriquer des patins qui sont fixés sur les bagues de la fusée.

ATTENTION : Aucun élément fixe ou mobile (aileron, interrupteur, vis, trappe) ne doit se trouver dans l'alignement des patins.



Figure 2.7 : Mise en rampe de Prométhée

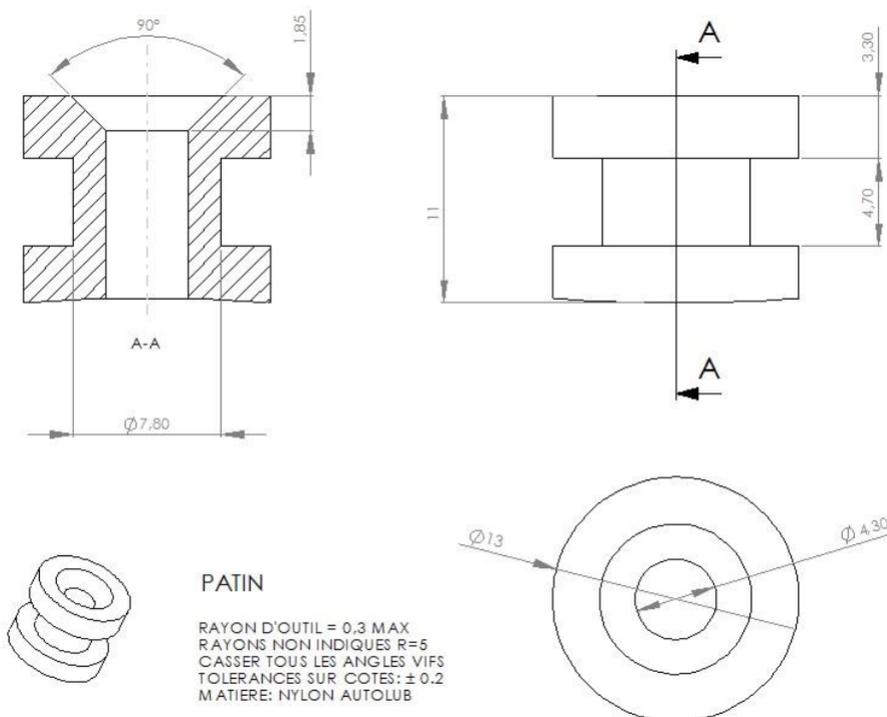
Nous avons usiné 2 patins. Ces derniers doivent être positionnés de part et d'autre du centre de gravité. Nous les avons placés aux extrémités de la fusée.

Les patins sont en aluminium. Néanmoins, nous nous sommes trompés sur les dimensions, ce qui a nécessité leur redimensionnement lors du C'Space. Voici ci-joint une photo des dimensions correctes des patins.

Le maintien en position de chaque patin est réalisé par une vis traversant la bague et la peau.



Figure 2.8 : Patins prométhée



6. Conception des ailerons

6.1. Calcul du centre de masse

Afin de remplir le Stabtraj, une des données essentielles est la valeur du centre de masse. Ce document Excel a pour but de calculer une approximation du centre de masse de la fusée, son fonctionnement est expliqué sur les figures suivantes :

Etape 1 : Saisir les dimensions de la fusée ainsi que le nombre d'ailerons

Entrer les dimensions de chaque élément (en mm)			Décalage		horizontal x		vertical y		
LONGUEUR TOTALE FUSEE	longueur:	2093			5,5			0	
	diamètre	11							
DIMENSION COIFFE	longueur:	400							
	diamètre	11							
DIMENSION PEAU RECUP + MINUTERIE	longueur:	598							
	diamètre	11							
DIMENSION PEAU EXPERIENCE	longueur:	584							
	diamètre	11							
DIMENSION PPEAU PROPU	longueur:	497							
	diamètre	11							
Nombre de bagues classiques		3							
Epaisseur bague classique		3							
Epaisseur bague reprise poussée		5							
			COORDONNES		horizontal x	vertical y			
			PEAU	-5,5	1693	PEAU RECUP + MINUTERIE		-5,5	1690
				-5,5	0			-5,5	1092
				5,5	0			5,5	1092
				5,5	1693			5,5	1690
				5,5	1693			-5,5	1690
			Coiffe gauche	-5,5	1693	PEAU EXPERIENCE		-5,5	1089
				-5,1	1753			-5,5	505
				-4,3	1813			5,5	505
				-3,2	1873			5,5	1089
				-2,1	1933			-5,5	1089
				0	2093				
			Coiffe droite	5,5	1693	PEAU PROPU		-5,5	502
				5,1	1753			-5,5	5
				4,3	1813			5,5	5
				3,2	1873			5,5	502
				2,1	1933			-5,5	502
				0	2093				
			aileron droit	5,5	460	aileron gauche		-5,5	460
				7,5	460			-7,5	460
				21,5	320			-21,5	320
				21,5	180			-21,5	180
				7,5	150			-7,5	150
				5,5	150			-5,5	150
			CADRE DU GRAPHE	1800	190	Déplacement vertical ailerons		0	
				0	-190	Nombre ailerons:		4	

Figure 2.9 : Calcul centre de masse Partie

Etape 2 : Saisir la masse ainsi que la position du centre de masse de chaque élément

POSITION DE CHAQUE CENTRE DE MASSE	horizontal x	vertical y
propu plein	0	250
propu vide	0	240
Indique le centre de masse de chaque élément . Néanmoins, il est nécessaire de pondérer la position de chaque centre de masse en fonction de la masse de chaque élément	0	1122
minuterie	0	1122
bague - reprise poussée	0	7,3
bague - inter étages 1	0	506,5
bague - inter étages 2	0	1093,5
bague - inter étages 3	0	1691,5
Anneau de centrage 1	0	226,5
Anneau de centrage 2	0	452
Cela est réalisé dans l'encadré "CENTRE DE MASSE PONDERE"	0	1490
récup (parachute + dispositif de largage)	0	1959,66667
coiffe	0	180
4 ailerons	0	180
peau	0	846,5
expérience	0	939
8 attaches ailerons	0	180
Fixation anneau centrage	0	248,5

MASSE ELEMENTS PROPULSIF	kg	masse en %
Peau	1,134	0,15293243
propu plein	1,68	0,226567768
minuterie	0,5	0,067430883
bague - reprise poussée	0,196	0,026432906
bague - inter étages 1	0,205	0,027646662
bague - inter étages 2	0,205	0,027646662
bague - inter étages 3	0,205	0,027646662
Anneau de centrage 1	0	0
Anneau de centrage 2	0,198	0,02670263
récup	1,1	0,148347943
4 ailerons	0,336	0,045313554
8 attaches ailerons	0,464	0,06257586
coiffe	0,392	0,052865813
expérience	0,5	0,067430883
Fixation anneau centrage	0,3	0,04045853
TOTAL	7,415	1

MASSE ELEMENTS SANS PROPULSIF	kg	masse en %
Peau	1,134	0,197733217
propu	0	0
minuterie	0,5	0,087183958
bague - reprise poussée	0,196	0,034176112
bague - inter étages 1	0,205	0,035745423
bague - inter étages 2	0,205	0,035745423
bague - inter étages 3	0,205	0,035745423
Anneau de centrage 1	0	0
Anneau de centrage 2	0,198	0,034524847
récup	1,1	0,191804708
4 ailerons	0,336	0,05858762
8 attaches ailerons	0,464	0,080906713
coiffe	0,392	0,068352223
expérience	0,5	0,087183958
Fixation anneau centrage	0,3	0,052310375
TOTAL	5,735	1

Centre de masse expérience : 175 mm en dessous de la bague de l'ogive

Figure 2.10 : Calcul du centre de masse Partie 2

Etape 3 : Calcul de la valeur du centre de masse sans propulseur et avec propulseur plein

CENTRE DE MASSE PONDERE SANS PROPULSIF	Xpond	Y pond
propu	0	0
minuterie	0	97,820401
bague - reprise poussée	0	0,2494856
bague - inter étages 1	0	18,105057
bague - inter étages 2	0	39,08762
bague - inter étages 3	0	60,463383
Anneau de centrage 1	0	0
Anneau de centrage 2	0	15,605231
récup	0	285,78901
coiffe	0	133,94757
4 ailerons	0	10,545772
peau	0	167,38117
8 attaches ailerons	0	14,563208
expérience	0	81,885737
Fixation anneau centrage	0	12,999128
TOTAL	0	938,42278

CENTRE DE MASSE PONDERE AVEC PROPULSIF PLEIN	Xpond	Y pond
propu	0	56,841842
minuterie	0	75,87451
bague - reprise poussée	0	0,1929602
bague - inter étages 1	0	14,003034
bague - inter étages 2	0	30,231625
bague - inter étages 3	0	46,764329
Anneau de centrage 1	0	0
Anneau de centrage 2	0	12,069589
récup	0	221,03844
coiffe	0	103,59337
4 ailerons	0	8,1564396
peau	0	129,45799
8 attaches ailerons	0	11,263655
expérience	0	63,317599
Fixation anneau centrage	0	10,053945
TOTAL	0	782,44837

Valeur de centre de masse a entrer dans le Stabtraj: 1154,577222 mm

Figure 2.111 : Calcul du centre de masse Partie 3

Nous avons ensuite utilisé le document fourni par Planètes sciences (Stabtraj) afin de dimensionner les ailerons. En entrant les données du centre de masse de la fusée dans le document Excel, il était possible de les dimensionner de différentes manières.

Voici la forme que nous avons choisi :

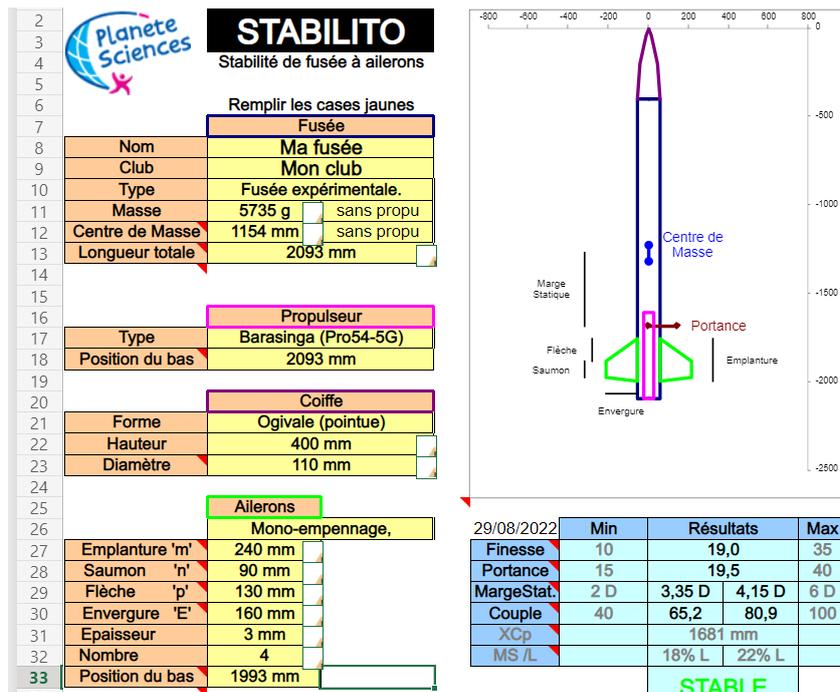


Figure 2.12 : Dimensions des ailerons sous Stabtraj

6.1. Fabrication des ailerons

Les ailerons ont été usinés par nos soins à partir d'une plaque d'aluminium de 3mm d'épaisseur récupérée au local de l'ESO. Après les avoir découpés et limés nous avons collé du scotch afin d'éliminer tout risque de coupure lors de la manipulation des ailerons.

Nous avons ensuite vissé les ailerons au corps de la fusée en installant des équerres, fixées dans les bagues de centrage.

ATTENTION : Il est essentiel que les ailerons soient alignés avec le corps de la fusée. Le placement des ailerons requière de la minutie car le perçage des anneaux de centrage est irréversible.

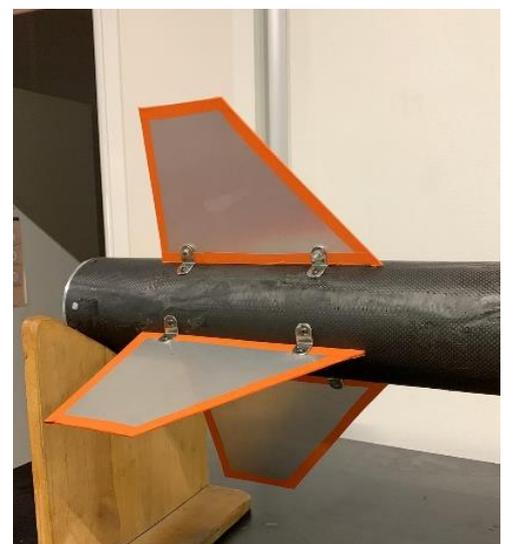


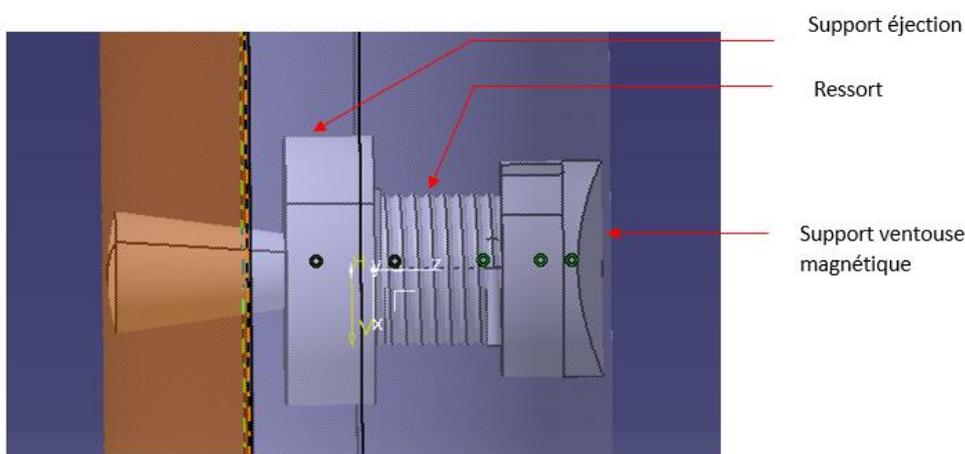
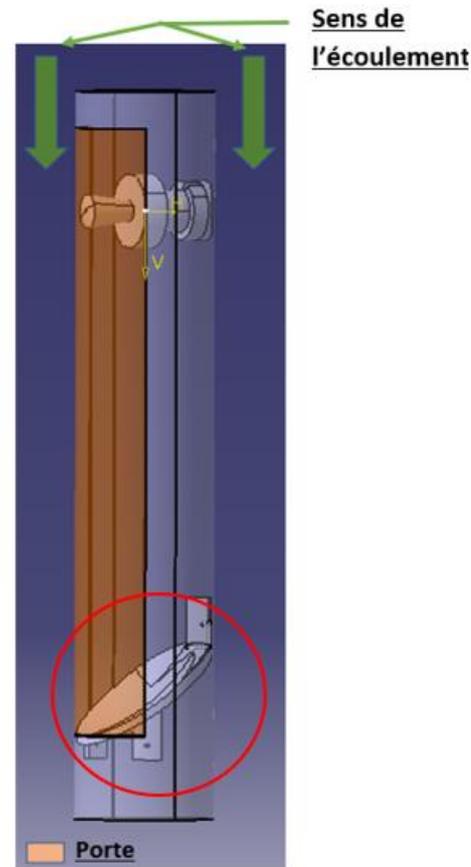
Figure 2.13 : Photo des ailerons installés sur la fusée

III.- Récupération

1. Système de largage du parachute

Nous avons choisi un système de largage avec porte latérale. Cela repose sur l'utilisation d'un ressort compressé par une ventouse magnétique et un aimant permanent. Lorsque la ventouse magnétique n'est pas alimentée, la porte est bloquée contre le corps de la fusée. Une fois l'apogée atteinte, un courant est envoyé dans la ventouse magnétique qui se désactive. Le ressort éjecte la porte qui emporte le parachute dans son sillage.

La pièce **entourée en rouge** sert à guider le parachute lors du largage afin d'éviter qu'il ne reste bloqué.



L'image ci-dessus correspond à une vue rapprochée du système d'éjection. La ventouse magnétique n'est pas visible car elle est entourée par le ressort. L'aimant permanent est quant à lui attaché sur la face plane du « support d'éjection » grâce à une vis à tête fraisée. Cela permet de maximiser la surface de contact avec la ventouse magnétique.

Toutes ces pièces à l'exception du ressort et des aimants sont imprimées en PLA.

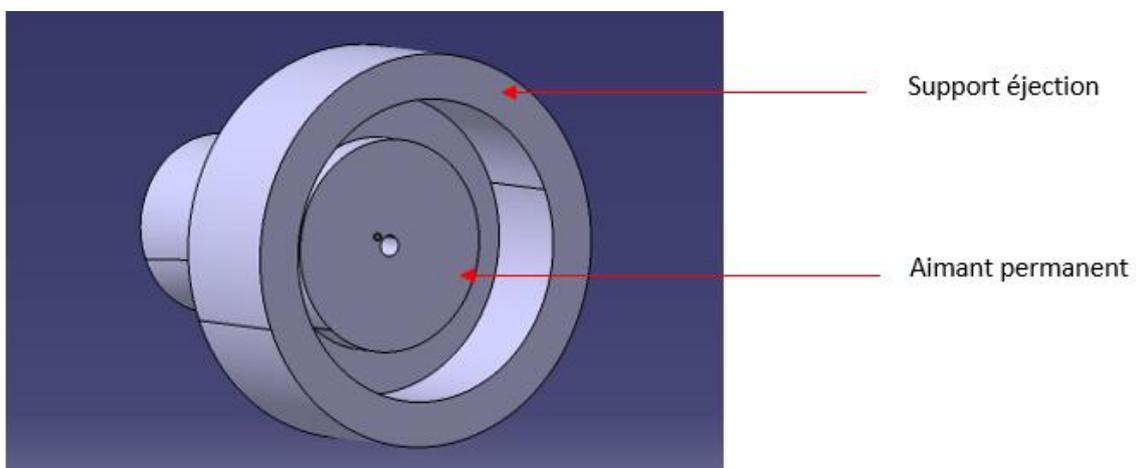




Figure 3.1 : Trappe d'éjection Prométhée

Durant le vol, la trappe est soumise à des efforts aérodynamiques importants. La force de maintien de la ventouse magnétique couplée à l'aimant permanent n'était pas suffisante pour empêcher la trappe de glisser sous la peau. Cela pouvant compromettre le largage du parachute, nous avons pallié à ce problème en collant des morceaux de chambre à air sur les extrémités de la trappe afin d'augmenter son épaisseur. Cette modification nous a permis de valider le système de largage du parachute.



Figure 3.2 : Ejection du parachute

Lorsque le système de récupération est activé, le haut de la porte est éjecté grâce au ressort. Les efforts aérodynamiques contribuent à tirer le parachute hors de la fusée.

2. Conception du parachute

La conception du parachute intervient lorsque la masse et le centre de gravité finaux sont définis. Nous avons choisi de concevoir un parachute circulaire. L'ESO dispose d'une machine à coudre Singer qui permet de renforcer la toile une fois découpée.



Figure 3.32 : Toile découpée



ETAPE 1 : Ajout des renforts extérieurs



ETAPE 2 : Ajout de renforts transversaux et sur le cercle intérieur

Sangles reliées à la trappe d'éjection afin d'extraire le parachute hors de la fusée

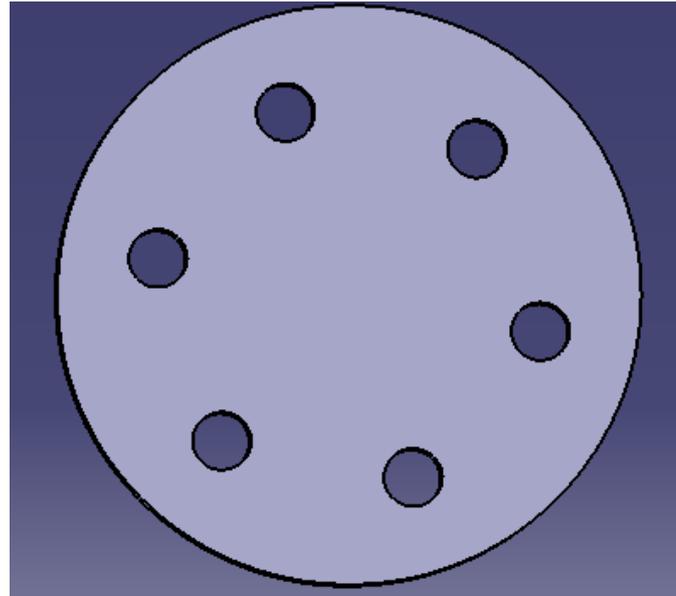


Les sangles utilisées pour transmettre les efforts appliqués sur les suspentes sont cousues « en croix » afin de maximiser leur résistance.

L'émerillon permet d'empêcher que les suspentes ne s'emmêlent à cause d'une rotation de la fusée ou du parachute



Nous avons utilisé 6 suspentes contre les 4 conseillées par le Stabtraj. Ce choix a été motivé par une volonté de stabilité du parachute lors de la descente. La longueur de chaque suspente étant peu précise, nous avons considéré qu'un nombre d'attaches plus important permettrait de compenser cette incertitude afin que le parachute puisse rester « droit » lors de la descente



L'anneau anti-torche permet d'éviter que les suspentes ne s'emmêlent lors de l'éjection du parachute



Le nœud de capucin permet d'attacher la suspente principale (corde rouge), et par extension le parachute à la bague faisant l'interface entre la récupération et la coiffe. La suspente principale est attachée à l'émerillon grâce à un nœud de 8 (non indiqué sur les photos).



Résistance de la suspente principale : environ 1300kg. Cette valeur est bien trop élevée comparé aux contraintes d'éjection (environ 60kg). L'utilisation d'une corde plus légère permettrait de réduire les couts tout en garnissant l'efficacité du dispositif de récupération.

Résistance des suspentes du parachute : environ 30kg. Utilisées au nombre de 6, on a donc une résistance de 180kg, ce qui est 3 fois supérieur à la valeur du stabtraj (60kg). Cette corde est bon marché et efficace.

IV.- Systèmes électronique

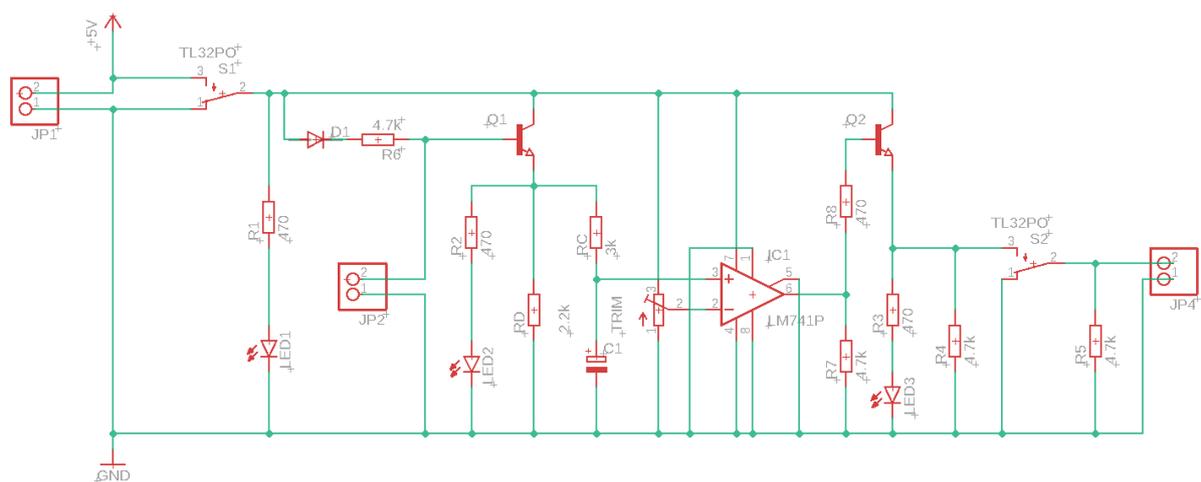
1. Conception de la minuterie

La conception de la minuterie a débuté en octobre 2020. Le choix technologique a rapidement été arrêté sur une minuterie analogique avec charge de condensateur et comparaison de la tension à l'aide d'un AOP monté en comparateur. Il a également été décidé que la tension d'alimentation de la minuterie serait de 5V (finalement augmentée à 6V tant pour des raisons pratiques que pour compenser la tension de saturation du transistor de sortie), dans le but de permettre la lecture directe du signal par le plus grand nombre de cartes pour le pas limiter les options de l'équipe en charge de la récupération.

Le système de déclenchement est resté plus longtemps sujet à débat, et il a éventuellement été décidé d'utiliser deux technologies redondantes, i.e. un déclenchement par arrachage de câble jack et un par arrachage d'un opercule sur un photorésistance. Ce double système a mené à également doubler la minuterie en ajoutant un second circuit identique en parallèle du premier.

Cette configuration a par la suite été modifiée lorsque la possibilité d'adjoindre un test d'ouverture de parachute double comme expérience a été évoqué, menant à l'utilisation d'un seul système de déclenchement, le jack, et à un signal de sortie distinct par carte. Cela a nécessité une reconception partielle du système.

Le cahier des charges a par la suite de nouveau changé, lorsque la décision a été prise de n'utiliser qu'un seul parachute. La minuterie a dû de nouveau être adaptée. La version finale ne comportait plus qu'une seule carte, déclenchée par arrachage de jack, et un seul signal de sortie. Ce circuit, finalement simple, est néanmoins resté plus complexe que nécessaire en raison de vestiges de conception des autres versions de la carte, que le manque de temps a mené à ne pas reprendre, préférant garder un circuit déjà testé et fonctionnel.



JP1 : Alimentation 6V
 JP2 : Jack de détection de décollage
 JP4 : Sortie de commande

Figure 4.1 : Schéma électrique de la minuterie

Le délai de la minuterie a été fixé à 15 secondes par le stabtraj final. La réponse temporelle du circuit RC a été déterminée et la valeur de la résistance aux bornes 2 et 3 du potentiomètre en a été déduite.

Ainsi, au moment du déclenchement de la minuterie :

$$u_c(t) = V_{alim} \left(1 - e^{-\frac{t}{R_c C}} \right) \quad 4.1$$

$$u_1 = \frac{V_{alim} \cdot R_{23}}{R_{pot}} \quad 4.2$$

$$u_c(t) = u_1 \quad 4.3$$

On en déduit donc :

$$t = -C \cdot R_c \cdot \ln \left(1 - \frac{R_{23}}{R_{pot}} \right) \quad 4.4$$

Soit :

$$R_{23} = R_{pot} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R_c C}} \right) \quad 4.5$$

Avec :

- $R_{pot} = 1000 \Omega$
- $C = 4700 \mu F$
- $T = 15 s$
- $R_c = 3000 \Omega$

Pour la détection du décollage, l'utilisation d'un câble jack mâle a dans un premier temps été envisagée, mais cette solution nécessite la soudure des fils dans celui-ci afin d'assurer le court-circuit, et la fiche elle-même peut être prompte à subir des dégâts au décollage en cas de mauvais alignement avec la prise femelle. Dans le pire des cas, la tête peut s'arracher et rester branchée dans la prise femelle provoquant un vol balistique (i.e. minif Kim Jong Boom, lancée au C'Space 2022). Il a donc été décidé d'utiliser une prise femelle jack de 2.5mm, disposée à un angle d'au maximum 45° par rapport à l'axe de la fusée, et à la place d'une prise mâle, un clou de même diamètre, dont l'extrémité a été limée, et solidement attaché à une cordelette (par exemple par le biais d'équerres sur Prométhée).

La CAO de la carte a été réalisée grâce au logiciel Eagle, puis imprimé par PCBWays, après des essais de fabrication à la fraiseuse qui se sont révélés infructueux en raison de la petite taille des pistes, des pastilles et des via, ainsi que de la présence de CMS, qui auraient été impossibles à monter sur une surface non traitée.

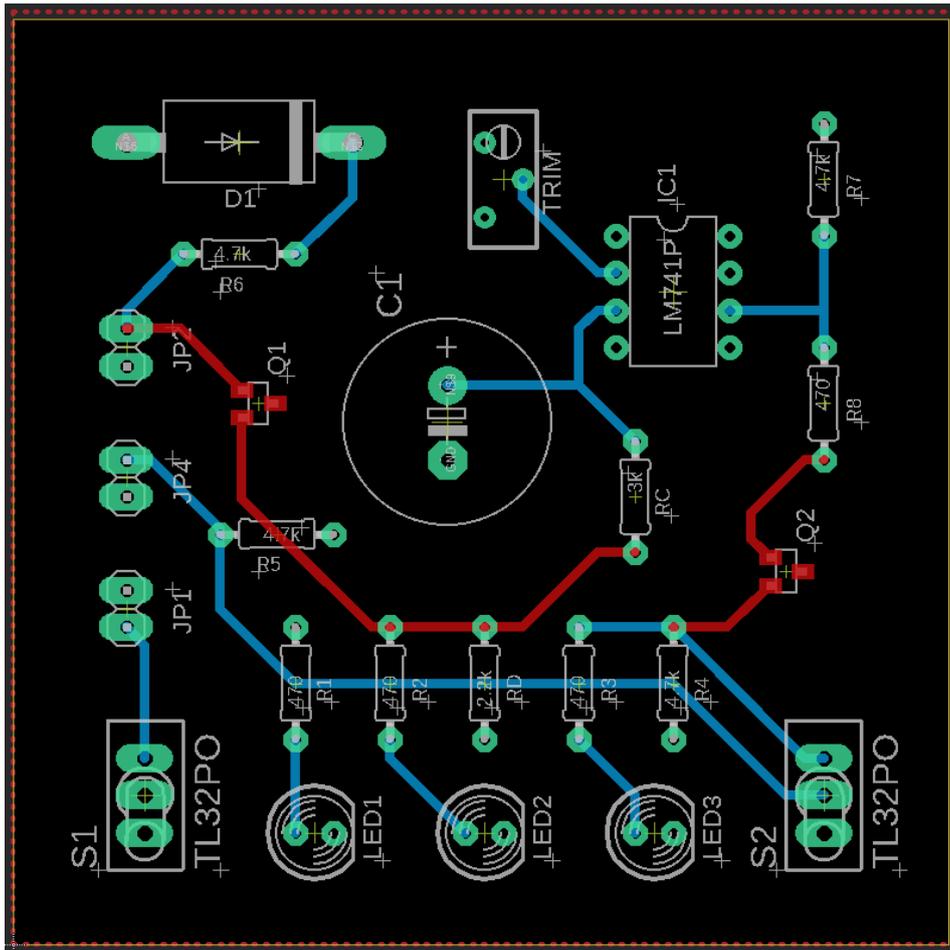


Figure 4.2 : CAO du PCB de la minuterie



Figure 4.3 : Minuterie avec composants assemblés sans connecteurs ni interrupteurs

2. Conception du rack de la minuterie

Le rack de la minuterie a été conçu à l'aide de CATIA, pour être imprimé en 3D. La conception du rack de la minuterie a débuté en février, mais a dû être reprise intégralement à la suite du changement de cahier des charges. La version finale a été terminée en mai, et imprimée dans la foulée.

Dans ce rack, la carte est maintenue verticalement à l'aide de rails et de languettes, de même que le pack de 4 piles 1,5V, lui aussi maintenu verticalement. Tous les connecteurs et câbles (à l'exception des interrupteurs) sont orientés vers de haut, et traversent le rack grâce à une longue entaille le long du rail de maintien supérieur.

Les interrupteurs sont fixés sur la porte du rack, et connectée à la carte par les câbles. Une erreur de conception empêche de retirer la porte du rack lorsque les interrupteurs sont montés, et nécessite donc leur démontage à chaque fois qu'il est nécessaire d'accéder à la minuterie, ce qui rallonge sensiblement toutes les opérations. Une attestation particulière sera donc apportée afin que cette erreur ne se répète pas à l'avenir.

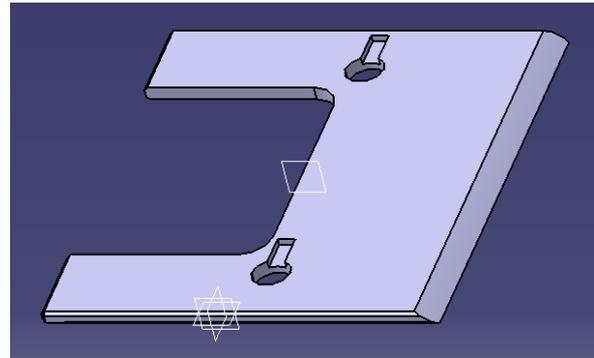


Figure 4.4 : CAO de la porte du rack

La prise femelle du système de déclenchement de la minuterie a été maintenue en position grâce à une vis de pression, directement visée dans le plastique préalablement taraudé. L'utilisation d'un insert n'a pas été nécessaire, mais elle peut être conseillée dans le cas où la pièce percée est particulièrement fine.

La mise en position du rack sur la bague est réalisée à l'aide d'un contact cylindrique aboutissant à un épaulement, et maintenu en position par les vis traversant la peau, la bague et le rack.

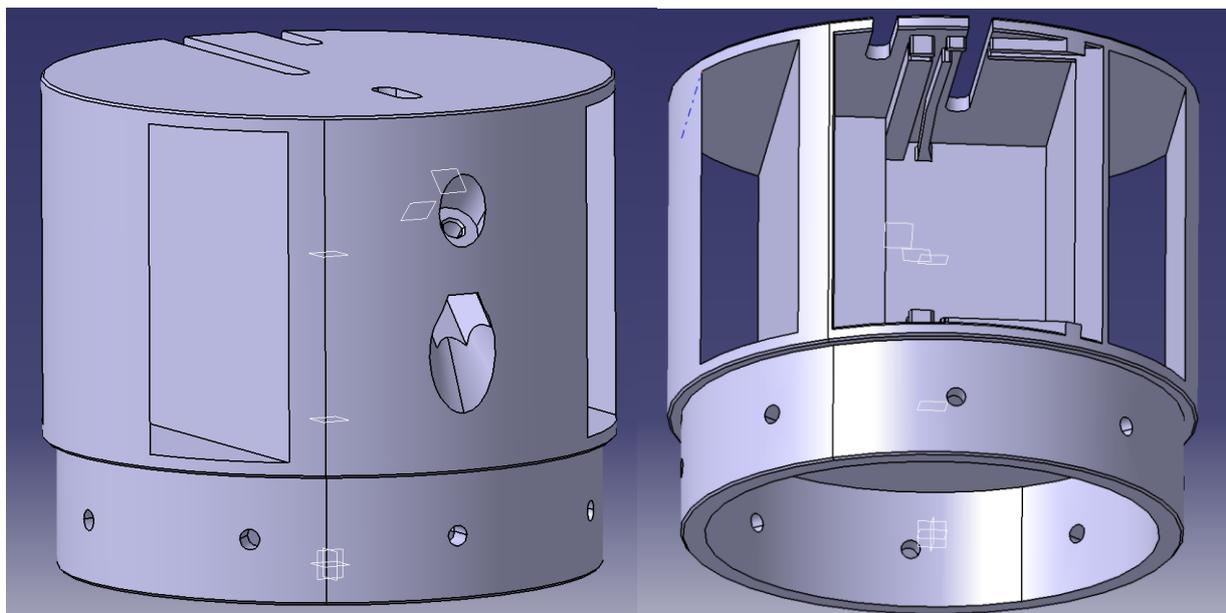


Figure 4.5 : CAO du rack de la minuterie

3. Conception du circuit de puissance de la récupération

La conception et la réalisation du circuit de puissance de la récupération a été réalisée tardivement. La décision d'utiliser une ventouse magnétique de 24V a rapidement été arrêtée, et il a été décidé de commander celle-ci à l'aide d'un transistor de puissance commandé par la minuterie.

Le transistor choisi étant un Darlington NPN, l'ajout d'une résistance de ligne de 330 Ohm sur la sortie pour réguler le courant a été nécessaire, après des problèmes de déclenchement à la suite des premiers tests réalisée sans cette résistance. Cette résistance a été soudée à même la patte du transistor pour éviter des ruptures en raison des efforts répétés appliqués lors du montage et démontage de la minuterie.

Des problèmes lors du C'Space liés à un possible court-circuit dans le rack de 2 piles A23 12V alimentant le circuit de puissance a mené à la décision de changer cette alimentation à la dernière minute, pour lui préférer 3 piles 9V en série, fixées au rack de la minuterie à l'aide de ruban adhésif.

Un bug non résolu étant apparu sur la minuterie durant le C'Space a mené à la présence d'une tension de déchet de 1,8V en sortie de l'AOP, et de 1,2V en sortie de la minuterie dès son alimentation, la sortie prenant néanmoins une valeur de 5V lors du déclenchement. Un pont diviseur de tension a dû être improvisé, utilisant la résistance de ligne déjà montée, et une résistance de 150 Ohm, dans le but d'abaisser la tension de sortie en dessous du seuil de saturation du NPN lorsque l'ouverture de la trappe n'est pas commandée.

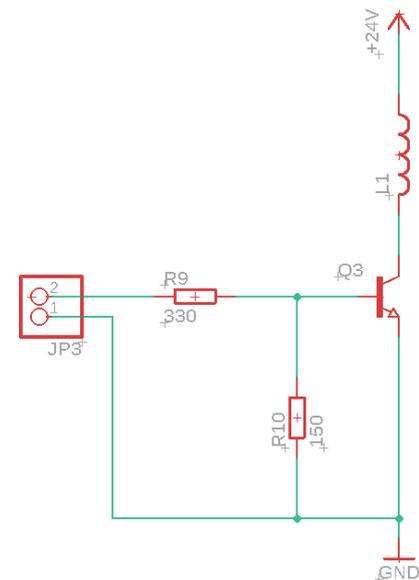


Figure 4.6 : Schéma électrique du circuit de puissance de la récupération

De manière générale, la décision de monter un circuit de puissance à l'aide de composants discrets, sans carte, a été imposée par le manque de temps pour réaliser un circuit imprimé correctement conçu, et a mené à de très nombreux problèmes à cause d'une conception hâtive et de soudures défectueuses. Cette pratique sera à absolument éviter dans le futur. Les circuits de commande et de puissance seront donc à l'avenir systématiquement rassemblés sur une même carte. Cela réduira la modularité de l'ensemble, mais permettra d'éviter l'utilisation d'un maximum de connecteurs, ce qui réduit les probabilités de faux-contacts à cause d'une soudure défectueuse.



Figure 4.7 : Minuterie assemblée dans son rack et circuit de puissance

4. Liste des composants

4.1. Liste du matériel de la minuterie

Composant	Valeurs	Référence	Quantité
Interrupteur	250 VAC / 3 A	MTE101A1	2
Résistance 470	470 Ohms	MF0207F470RH	4
Résistance 2,2k	2,2k Ohms		1
Résistance 3k	3k Ohms		1
Résistance 4,7k	4,7k Ohm		4
Condensateur	4700 μ F / 6.3 V	EEU-FM0J472L	1
Diode	600 V / 3 A	1N5406	1
LED rouge	3 mm / 2500 mcd	1577457	1
LED jaune	3 mm / 2500 mcd	1577332	1
LED verte	3 mm / 2000 mcd	3034G3D-EHE-A	1
Potentiomètre	0.5 W / 25 trs / 1k Ohms	WEL3296-Y-102-LF	1
Transistor	5 V / 20 mA min	BC847C	2
ALI		LM741	1
Jack femelle mono			1
Piles LR3 (AAA)	1,5 V		4
Coupleur pile	4*LR3 (AAA)		1

Il est à ajouter à cette liste un interrupteur de minif, intégré au dernier moment à la suite de dégâts subis par l'un des deux interrupteurs de la minuterie lors de soudures, dont nous n'avons pas la référence exacte.

De même toutes les résistances utilisées de valeurs différentes de 470 Ohm ont été trouvées sur place. Le reste des composants a été commandé sur le site CONRAD.

4.2. Liste du matériel du circuit de puissance du système de récupération

Composant	Valeurs	Référence	Quantité
Résistance 330	330 Ohms		1
Résistance 150	150 Ohms		1
Domino			1
Ventouse magnétique	24 V / 3,5 W / 270 N		1
Piles 6LR61	9 V		3
Connecteur à clip	6LR61		3

Un aimant a également été commandé, mais celui-ci étant serti dans un pot, il est apparu à la suite de tests qu'il ne convenait pas. Il a par la suite été nécessaire d'improviser à partir des composants disponibles sur place, dans un premier temps à l'aide d'une rondelle en acier dont le perçage trop large a nécessité le montage d'une barre de maintien, puis une rondelle plus adaptée, trouvée lors du C'Space, montée directement sur la tige filetée solidaire de la trappe. Pour cette raison, il n'y a pas de référence pour cet aimant.

De même, la décision de changer l'alimentation du circuit de puissance ayant été actée au dernier moment, nous n'avons pas de références exactes pour les piles ou les connecteurs utilisés.

V.- Expérience

L'objectif de l'expérience fut la conception et le test d'un Filtre de Kalman Étendu (EKF) permettant la reconstruction post-lancement de la trajectoire d'une fusée expérimentale. La complexité des systèmes de trajectographie réside dans les forts biais et bruits perturbant les mesures des capteurs low-costs accessibles compte tenu du budget typiquement alloué aux expériences à l'ESO. Le filtre de Kalman représente donc une solution intéressante, car celui-ci permet la fusion des mesures en provenance de capteurs de nature différentes afin d'obtenir l'estimation optimale du vecteur d'état de la fusée expérimentale à chaque instant du vol.

Notre ambition consiste ainsi à démontrer la faisabilité de ce type de système de trajectographie et à concevoir un algorithme standard pouvant être intégré sur de futurs projets à des fins de Navigation temps réel.

1. Organisation du pôle

Il est recommandé à tout futur projet souhaitant réaliser un système de trajectographie fondé sur l'utilisation d'un filtre de Kalman de posséder la répartition des membres suivants :

- *Responsable du pôle avionique / expérience (x1)* : supervision de l'expérience, de l'intégration et de l'interaction avec les autres pôles. Nécessite de bonnes compétences dans chacun des domaines (électronique, logiciel, Automatique, ...) afin de coordonner les autres pôles de l'expérience.
- *Responsable système embarqué (x1)* : Supervision du système d'acquisition de la Fusex (logiciel embarqué, cartes, capteurs, ...). Nécessite des compétences en électronique et en C/C++. Gestion de l'intégration à la Fusex et de l'alimentation du système.
- *Responsables système de mesure HF (x2)* : Développement du logiciel HF (enregistrement des données, acquisition, interface avec les capteurs, ...), choix des composants et conception des cartes.
- *Responsables système de mesure BF (x2)* : Développement du logiciel BF (enregistrement des données, acquisition, interface avec le GPS, ...), choix du GPS et conception des cartes.
- *Responsables logiciel de trajectographie (x2-3)* : Développement du filtre de Kalman (formulation mathématique, algorithmique, modèle physique), implémentation et validation du fonctionnement à l'aide d'une simulation. Requiert de fortes compétences en programmation sous C/Python, en mathématique et en physique.

En raison du faible nombre de membres intéressés par le pôle Avionique / Expérience au sein de l'ESO lors de l'année 2021/2022, ce dernier fut uniquement constitué de deux membres actifs. La disparité de connaissances théoriques au sein du pôle empêchant une répartition équitable des tâches, il fut décidé que la mise en place du filtre de Kalman reviendrait intégralement au responsable du pôle (travaillant alors en parallèle sur la conception du système embarqué avec le second membre).

2. Théorie

La mise en orbite d'un système spatial (satellite, sonde, Télescope spatial, ...) requiert la connaissance précise de l'attitude, de la position et de la vitesse du lanceur à chaque instant du vol. Le sous-système GNC (*Guidance, Navigation and Control*) garantit le suivi de la trajectoire optimale par le lanceur

- Le sous-système de *navigation* permet la connaissance précise des variables position/vitesse/attitude du lanceur en temps réel.
- Le sous-système de *guidage* permet le calcul des consignes sur la position/vitesse/attitude du lanceur afin suivre de la trajectoire optimale.
- Le sous-système de *pilotage* assure la commande des actionneurs assurant le suivi de la consigne du module de guidage.

2.1. Principes fondamentaux de la navigation inertielle

La plupart des systèmes de Navigation temps-réel intégrés sur les lanceurs de type Ariane V sont fondés sur le principe de la *Navigation inertielle*. Cette dernière utilise les mesures de vitesse angulaire et d'accélération fournies par la centrale inertielle afin de déterminer les déplacements du lanceur par rapport aux conditions initiales ($\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{x}_0$) et constitue une technologie attractive en raison de sa fiabilité et de son autonomie.

La *centrale inertielle* (IMU) est constituée de deux principaux capteurs :

- Les *gyromètres*, qui fournissent des mesures de la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ du lanceur.
- Les *accéléromètres*, qui fournissent des mesures de la force spécifique $\mathbf{f}^s = \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{g}$ (ou $\boldsymbol{\gamma}$ représente l'accélération du lanceur). Il est important de noter que la force spécifique est homogène à une accélération, qui est ici due aux efforts non gravitationnels (poussée, efforts aérodynamiques, ...) appliqués sur le lanceur.

En reprenant la définition de l'accélération et de la vitesse d'un objet, nous pouvons mettre en place le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = [\mathbf{M}_{f \rightarrow G}(\boldsymbol{\theta}_G)] \cdot \boldsymbol{\gamma}_f \quad 5.1$$

$$\frac{d \boldsymbol{\theta}_G}{dt} = [\mathbf{M}_{f \rightarrow G}(\boldsymbol{\theta}_G)] \cdot \boldsymbol{\omega}_f \quad 5.2$$

Où \mathbf{r}_G et $\boldsymbol{\theta}_G$ représentent respectivement le vecteur position et le vecteur d'attitude du lanceur dans le repère global R_G (Nous prendrons le repère ENU – *East, North, Up* dont l'origine coïncide avec celui du pas de tir).

Prenons l'exemple simple d'un lanceur positionné sur un pas de tir dont l'axe longitudinal coïncide avec l'axe vertical local. Nous supposons que le moteur fournit une accélération constante verticale $\boldsymbol{\gamma}_f = \gamma_f \cdot \hat{\mathbf{z}}_G$. Afin de simplifier davantage, nous supposons la vitesse angulaire du lanceur nulle, ce qui signifie que le vecteur d'attitude du lanceur sera constant (nous prendrons $\boldsymbol{\theta}_G = \mathbf{0}$, ce qui revient

alors a $[\mathbf{M}_{f \rightarrow G}(\boldsymbol{\theta}_G)] = \mathbf{I}_3$). Ainsi, nous pouvons projeter l'équation (5.1) sur l'axe $\hat{\mathbf{z}}_G$, ce qui nous permet finalement d'obtenir :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \gamma_f \quad 5.3$$

Et en remplaçant γ_f par $\mathbf{f}^S + \mathbf{g}$ (où $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}_G$ et $\mathbf{f}^S = f_z^S\hat{\mathbf{z}}_G$), nous obtenons finalement :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = f_z^S - g \quad 5.4$$

En supposant tous les termes de l'équation (5.4) constants, nous obtenons l'expression de l'altitude théorique $z_{th}(t)$:

$$z_{th}(t) = \frac{1}{2}(f_z^S - g)t^2 \quad 5.5$$

Dans la réalité, les mesures accélérométriques f_z^S souffrent de bruits $v_{f_s}(t)$ et de biais de mesure b_{f_s} . Ainsi, il est courant de modéliser la mesure de l'accéléromètre comme suit :

$$f_z^S(t) = f_z^{S,th} + b_{f_s} + v_{f_s}(t) \quad 5.6$$

En intégrant l'équation (5.6), nous obtenons l'expression de l'altitude $z_r(t)$ estimée avec présence des biais de mesure :

$$z_r(t) = z_{th}(t) + \frac{1}{2}b_{f_s}t^2 + \iint_{t_0}^t v_{f_s}(\tau)d\tau^2 \quad 5.7$$

L'erreur d'estimation $\Delta z(t)$ s'exprime

$$\Delta z(t) = z_r(t) - z_{th}(t) = \frac{1}{2}b_{f_s}t^2 + \iint_{t_0}^t v_{f_s}(\tau)d\tau^2 \quad 5.8$$

Ainsi, minimiser cette erreur requiert la minimisation du biais b_{f_s} , ce qui signifie que la Navigation Inertielle nécessite l'utilisation de capteurs haute performance possédants de faibles bruits et biais de mesure (Fig. 5.1). Ces capteurs possèdent un coût qui rend impossible leur utilisation par le grand public, ce qui nécessite le développement d'une solution plus innovante afin d'estimer la trajectoire de la Fusex.

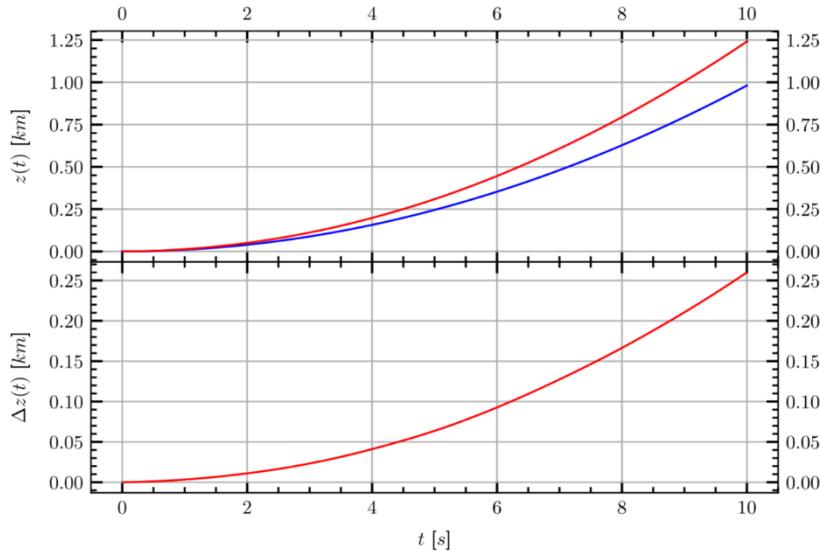


Figure 5.1 : exemple d'estimation de l'altitude d'un lanceur grâce à la navigation inertielle avec présence d'un biais de mesure $b_{f_s} = 0.5g$ et un bruit de mesure de variance $\sigma_{f_s} = 0.2g$ pour une accélération de $2g$ (rouge) et sans biais/bruits de mesure (bleu). L'écart $\Delta z = z_r - z_{th}$ rend impossible l'utilisation de ce type de système pour la navigation.

2.2. Formulation du modèle dynamique de la Fusex

En automatique, il est courant de modéliser un *système linéaire invariant continu* sous la forme d'une équation matricielle nommée **représentation d'état** :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad 5.9$$

Avec :

- $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ le vecteur **d'état** (et $x_1(t), \dots, x_n(t)$ les variables d'état).
- $\mathbf{z}(t) = [z_1(t), \dots, z_m(t)]^T$ le vecteur des **mesures**.
- $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_r(t)]^T$ le vecteur des **entrées**.
- **A**, **B**, **C** et **D** les matrices caractérisant la dynamique de notre système et l'acquisition des mesures.

Le vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$ est un élément clef intervenant dans la modélisation d'un système. En effet, ce dernier représente notre connaissance du fonctionnement interne du système et regroupe les variables permettant de décrire de manière unique l'état du système. Le choix du vecteur d'état constitue une étape primordiale du développement d'un modèle et requiert une bonne compréhension de la finalité du modèle ainsi que des ressources calculatoires à disposition. A titre d'exemple extrême, il est évident le contrôle d'une voiture autonome ne requiert pas la connaissance du niveau atomique de chacun des atomes de la voiture ! Il est donc souvent intéressant de rechercher la minimisation du nombre de variables d'état d'un système. Ainsi, la construction d'un vecteur d'état fait souvent appel à l'expérience et nécessite un certain nombre d'essais.

Les matrices **A** et **B** permettent de modéliser la dynamique du système. La matrice **A** décrit l'évolution du système en l'absence de sollicitations extérieures (modélisées par le vecteur des entrées $\mathbf{u}(t)$). La matrice **B** modélise quant à elle la réponse du système à ces sollicitations extérieures. La seconde partie de l'équation permet de caractériser l'évolution des mesures/sorties $\mathbf{z}(t)$ du système en fonction son état $\mathbf{x}(t)$ (la relation entre les sorties et l'état est modélisée par la matrice **C**) et des sollicitations extérieures $\mathbf{u}(t)$. Il est primordial de noter que lorsque nous faisons ici la distinction

entre « milieu extérieur » / « système », il ne s'agit pas d'une distinction aussi simple que « Extérieur / Fusée ». En effet, il est courant que le système de la Fusex puisse par exemple contenir des variables d'état de l'atmosphère tels que la température, la pression, ... Une fois de plus, la définition des limites du système fait appel à l'expérience et à la connaissance de la finalité de la modélisation.

Dans le cadre de notre expérience, l'échantillonnage de nos mesures à une période $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ justifie l'adoption d'une formulation discrète. Il est possible de démontrer que l'équation (3.8) devient dans le domaine discret :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k \end{cases} \quad 5.10$$

Avec :

- $\mathbf{F}_k = e^{A(t_k)\Delta t}$
- $\mathbf{H}_k = \int_0^{\Delta t} e^{A(t_k)\tau} d\tau \cdot \mathbf{B}(t_k)$

On notera le caractère plus général de l'équation (5.10) par rapport à l'équation (5.9), car les matrices du système peuvent être modifiées au cours du temps. Celle-ci fonctionne parfaitement afin de comprendre et décrire la dynamique d'un système dans les conditions idéales. Malheureusement celle-ci ne tient pas compte des bruits de mesures des capteurs ainsi que des erreurs d'estimations sur les paramètres du modèle (tels que la masse et le diamètre de la Fusex par exemple). Aussi, il est nécessaire de modifier l'équation (5.10) afin de prendre en compte ces erreurs :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad 5.11$$

Dans cette nouvelle formulation :

- \mathbf{w}_k est un vecteur aléatoire modélisant les **bruits liés au modèle** (suppose gaussien tel que $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_k)$, où \mathbf{Q}_k est la matrice de covariance du bruit du modèle). Ces bruits représentent l'incertitude sur les paramètres du modèle, sur les entrées, ...
- et \mathbf{v}_k est un vecteur aléatoire modélisant les **bruits de mesure** (suppose gaussien tel que $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_k)$, où \mathbf{R}_k est la matrice de covariance du bruit de mesure). Ce vecteur modélise les bruits de mesure des capteurs.

L'objectif de la phase de construction du modèle est donc de déterminer l'ensemble des paramètres de l'équation (5.10) afin d'estimer la valeur du vecteur d'état \mathbf{x}_{k+1} à l'instant t_{k+1} , connaissant la valeur \mathbf{x}_k du vecteur d'état à l'instant t_k .

A ce stade de notre raisonnement, nous disposons d'un modèle permettant de déterminer l'évolution de notre système au cours du temps connaissant les entrées \mathbf{u}_k à chaque instant t_k (l'entrée \mathbf{u}_k peut par exemple représenter la poussée du moteur). Malheureusement, ce modèle seul ne nous permet pas de déterminer la trajectoire de la Fusex. En effet, la direction et l'intensité de la poussée sont mal connues, et la moindre incertitude sur ces dernières risque d'entraîner des écarts importants. Afin de résoudre ce problème, il est nécessaire de boucler notre système en ajoutant un « retour d'état » fondé sur l'utilisation des mesures.

2.3. Le Filtre de Kalman Etendu (EKF)

Un Filtre de Kalman (KF) est un algorithme d'estimation optimal récursif qui permet de d'estimer l'évolution du vecteur d'état d'un système $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ au cours du temps. Ce dernier se fonde sur l'utilisation de deux principales informations :

- Le **modèle dynamique du système** permettant de prédire l'évolution du vecteur d'état.
- Une **série de mesures** (souvent bruitées ou incomplètes) fournissant des informations partielles sur l'état du système.

Le modèle dynamique (ou modèle d'évolution) permet de prédire la valeur du vecteur d'état du système $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ connaissant l'état du système à l'instant t_{k-1} : $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$. Cette prédiction permet en retour, à l'aide du modèle de mesure de notre système, de prédire le vecteur des mesures que l'on aurait obtenu si l'état du système était l'état $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ prédit par le modèle d'évolution (Figure 5.2).

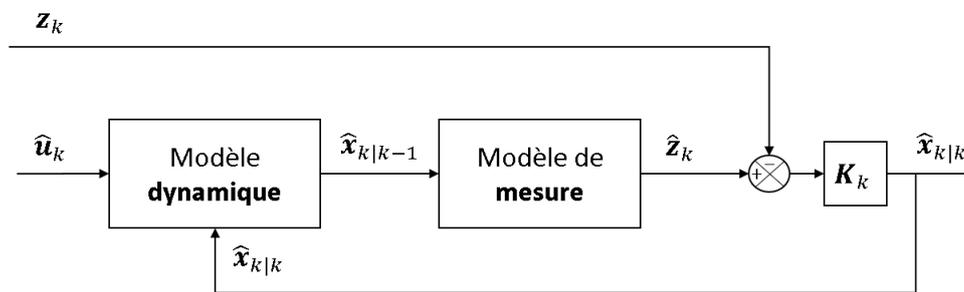


Figure 5.2 : principe de fonctionnement du Filtre de Kalman (KF)

L'estimée optimale du vecteur d'état $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ à l'instant t_k peut ainsi être calculée en comparant les mesures réelles \mathbf{z}_k aux mesures $\hat{\mathbf{z}}_k$ prédites par le modèle :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \quad 5.12$$

Le lecteur pourra ici noter la similitude entre l'expression 5.12 et l'expression du retour d'état d'un système. En adaptant l'équation 5.10, nous obtenons le modèle dynamique ainsi que le modèle de mesure :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad 5.13a$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \quad 5.13b$$

Afin de comprendre la littérature associée aux filtres de Kalman, il est primordial de bien comprendre chacun des termes intervenant au sein de ces équations :

- $\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}$ correspond à l'estimation du vecteur d'état à l'instant t_{k-1} . Le filtre de Kalman étant un algorithme *récursif*, ce vecteur d'état est supposé être l'estimation optimale du vecteur d'état réel de notre système \mathbf{x}_k à l'instant t_{k-1} (il est important de souligner ici que \mathbf{x}_k est

inconnu et que l'objectif de notre algorithme est de calculer l'estimation $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ permettant de minimiser la covariance de l'erreur d'estimation \mathbf{P}_k).

- $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ est la prédiction du vecteur d'état à l'instant t_k en considérant uniquement le modèle dynamique du système décrit eq. (5.13a) et les informations disponibles pour $t \leq t_{k-1}$.
- $\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}$ est la prédiction du vecteur des mesure à l'instant t_k . Celle-ci est calculée à partir de la prédiction du vecteur d'état $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ et de l'équation (3.13b).
- \mathbf{z}_k est le vecteur des mesures réel.
- $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ est le vecteur d'état optimal estimé à partir du modèle dynamique du système (et par extension, des informations disponibles à l'instant t_{k-1}) et à partir des mesures \mathbf{z}_k effectuées à l'instant t_k . Cet état estimé est ensuite utilisé afin de calculer les états suivants $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}, \dots$

L'équation (5.12) montre que l'écart $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ entre l'état prédit et l'état optimal est « proportionnel » à l'erreur de prédiction de la mesure ($\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k$). La matrice de proportionnalité \mathbf{K}_k est appelé *gain de Kalman*. L'objectif de l'algorithme est de déterminer à chaque instant t_k la valeur optimale de ce **gain permettant de minimiser la covariance de l'erreur d'estimation** :

$$\mathbf{P}_k = \mathbb{E}[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})^T] \quad 5.14$$

Ce calcul se fait en deux étapes distinctes :

1. Prédiction

Son objectif consiste à prédire l'évolution de l'estimée du vecteur d'état en fonction du modèle et des informations disponibles jusqu'à l'instant t_{k-1} . Afin de minimiser \mathbf{P}_k , le filtre de Kalman réalise en continu une estimation $\hat{\mathbf{P}}_{k|k}$ de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad 5.15a$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{P}}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \quad 5.15b$$

2. Mise-à-jour

Une fois la matrice de covariance $\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}$ et le vecteur d'état $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ prédits, le filtre de Kalman calcule le gain de Kalman optimal \mathbf{K}_k à l'instant t_k :

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \quad 5.16a$$

$$\mathbf{K}_k = \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \quad 5.16b$$

\mathbf{S}_k désigne la matrice de covariance de l'erreur de prédiction de la mesure :

$$\mathbf{S}_k = \mathbb{E}[(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T] \quad 5.17$$

Une fois le gain de Kalman estimé, il suffit de mettre à jour les estimées du vecteur d'état et de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad 5.18a$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{k|k} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \quad 5.18b$$

Afin d'améliorer la stabilité de l'algorithme, il est primordial de garantir que la matrice de covariance de l'estimation $\hat{\mathbf{P}}_{k|k}$ reste définie positive après l'étape de mise à jour du vecteur d'état. Pour cela, une solution simple consiste à remplacer $\hat{\mathbf{P}}_{k|k}$ par

$$\hat{\mathbf{P}}_{k|k} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{P}}_{k|k} + \hat{\mathbf{P}}_{k|k}^T) \quad 5.19$$

Après avoir calculé $\hat{\mathbf{P}}_{k|k}$ en utilisant l'équation (3.18b). Cette solution constitue davantage une « astuce » qu'une méthode mathématique, mais celle-ci a démontré son intérêt à de nombreuses reprises lors de la conception de l'algorithme.

Comme nous l'avons vu précédemment, les équations du filtre de Kalman supposent le système linéaire. Malheureusement, comme nous le verrons dans la suite de ce rapport, les modèles dynamiques et de mesure sont non-linéaires dans le cas de la Fusée :

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k) \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, t_k) \end{array} \right. \quad 5.20$$

Le principe du **Filtre de Kalman Etendu (EKF)** consiste à linéariser localement les fonctions $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k)$ et $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k, t_k)$ (à chaque instant t_k) en fonction des variables d'état \mathbf{x}_k et des entrées \mathbf{u}_k afin de retrouver les équations du filtre de Kalman linéaires présentées précédemment :

$$F_k^{ij} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k^j} \right]_{\substack{i \in [1,n] \\ j \in [1,n]}} \quad 5.21a$$

$$G_k^{ij} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_k^j} \right]_{\substack{i \in [1,n] \\ j \in [1,m]}} \quad 5.21b$$

$$H_k^{ij} = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_k^j} \right]_{\substack{i \in [1,r] \\ j \in [1,r]}} \quad 5.21c$$

2.4. Modèle de la Fusée expérimentale

Maintenant que les équations fondamentales du Filtre de Kalman ont été posées, il est nécessaire de mettre en place les modèles d'évolution et de mesure de notre système.

Afin de calculer la trajectoire de la Fusée expérimentale, nous avons utilisé un GPS, un capteur de pression et de température, un magnétomètre, un accéléromètre et un gyroscope. Aussi, si nous souhaitons que les mesures puissent être prises en comptes par le filtre, il est nécessaire que le vecteur d'état ainsi que nos modèles permettent le calcul de chacune des grandeurs au cours du vol.

2.4.1. Repères de calcul

L'objectif du modèle dynamique de notre système est de lier l'accélération et la vitesse angulaire de la Fusex à sa vitesse/attitude/position. Il est possible de distinguer trois principaux repères :

- Le **repère global terrestre** R_G (*Earth-Centered Earth-fixed* ou *ECEF*) (x_G, y_G, z_G) qui est un repère dont l'origine est située au centre de la terre. L'axe z est dirigé vers le nord géographique et l'axe x vers le point d'intersection entre l'équateur et le méridien de Greenwich (origine des longitudes).
- Le **repère local terrestre** R_L (nous prendrons le repère *East-North-Up* ou *ENU*) (x_L, y_L, z_L) qui correspond au repère lié au site de lancement de la Fusex.
- Le **repère local de la Fusex** R_f (x_f, y_f, z_f) , défini tel que x_f soit dans l'axe de la Fusex et z_f pointe vers la verticale descendante lorsque la Fusex est à l'horizontale. Il s'agit du repère dans lequel les grandeurs inertielles seront exprimées lors des simulations. L'axe de mesure des accéléromètres sont tels que $x_a = y_f, y_a = z_f$ et $z_a = x_f$.

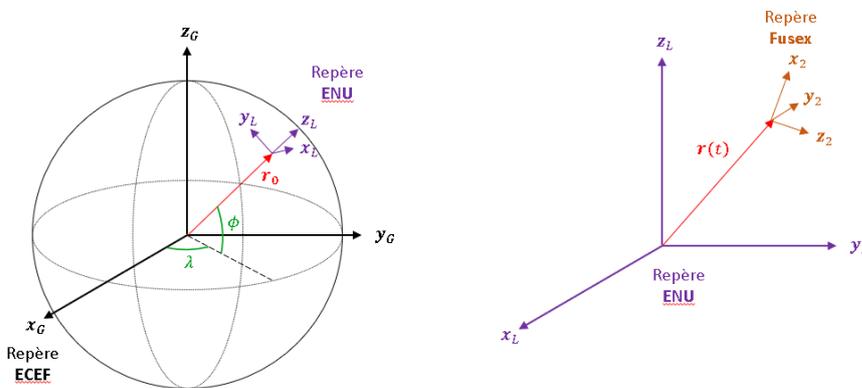


Figure 5.3 : Repères de calcul.

Afin de simplifier le problème, nous avons supposé la Terre fixe (ceci peut se justifier par la courte durée de vol). Cela nous a permis de considérer le repère (ENU) comme repère global de calcul. Les données GPS étant fournies dans le repère ECEF, il est possible (connaissant la latitude ϕ_0 et la longitude λ_0 du lancement) de convertir les mesures du GPS dans le repère ENU en appliquant la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 \\ -\cos \lambda_0 \sin \phi_0 & -\sin \lambda_0 \sin \phi_0 & \cos \phi_0 \\ \cos \lambda_0 \cos \phi_0 & \sin \lambda_0 \cos \phi_0 & \sin \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix} \quad 5.22$$

Dans le cas où les mesures du GPS sont fournies sous la forme $[\lambda_{GPS} \ \phi_{GPS} \ z_{GPS}]^T$, il est possible de remonter au vecteur dans le repère ECEF en appliquant les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 x_G &= (N(\phi_{GPS}) + z_{GPS}) \cos \phi_{GPS} \cos \lambda_{GPS} \\
 y_G &= (N(\phi_{GPS}) + z_{GPS}) \cos \phi_{GPS} \sin \lambda_{GPS} \\
 z_G &= (N(\phi_{GPS})(1 - e^2) + z_{GPS}) \sin \phi_{GPS}
 \end{aligned}
 \tag{5.23}$$

Avec :

$$N(\phi_{GPS}) = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi_{GPS}}}
 \tag{5.24}$$

Où $e = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)$ et $a = 6\,378\,137.0$ m / $b = 6\,356\,752.314\,245$ m, (valeurs fournies par le modèle WSG84).

L'attitude de la Fusex correspond à l'orientation entre le repère local de la Fusex R_f et le repère local du site de lancement R_L . Afin de simplifier le problème, nous appellerons le repère de lancement (ENU) « repère global » (ceci n'est pas exact dans le cas général, mais reste acceptable sous l'hypothèse de terre fixe).

Il existe plusieurs façons de représenter l'orientation relative entre deux repères (angles d'Euler, ...), mais nous avons utilisé les **quaternions** en raison de l'absence de singularité lors de la propagation du vecteur d'état.

2.4.2. Algèbre et arithmétique de quaternions

Un quaternion \mathbf{q} peut être comparé à un nombre complexe possédant 4 constitué d'une partie réelle (notée q_0) et trois parties imaginaires (notées q_1, q_2 et q_3) tel que :

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k
 \tag{5.25}$$

Le conjugué d'un quaternion est alors :

$$\mathbf{q}^* = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k
 \tag{5.26}$$

Une rotation permettant de passer d'un repère 1 à un repère 2 peut être modélisée par un quaternion de rotation $\mathbf{q}_{1 \rightarrow 2}$. La matrice de rotation $\mathbf{M}_{1 \rightarrow 2}$ peut être calculée à partir du quaternion de rotation en appliquant la relation :

$$\mathbf{M}_{1 \rightarrow 2} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}
 \tag{5.27}$$

Il est possible de relier un quaternion \mathbf{q} aux angles d'Euler (ϕ, θ, ψ) en appliquant la relation :

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \cos \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
 q_1 &= \sin \frac{\phi}{2} \cos \theta \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
 q_2 &= \cos \frac{\phi}{2} \sin \theta \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\
 q_3 &= \cos \frac{\phi}{2} \cos \theta \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\phi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2}
 \end{aligned}
 \tag{5.28}$$

Cette relation est valide dans le cas d'une séquence de rotation ($\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$). La transformation inverse correspond à la relation :

$$\begin{aligned}
 \phi &= \text{atan2} \left(\frac{2(q_0 q_1 + q_2 q_3)}{1 - 2(q_1^2 + q_2^2)} \right) \\
 \theta &= \arcsin(2(q_0 q_2 - q_3 q_1)) \\
 \psi &= \text{atan2} \left(\frac{2(q_0 q_3 + q_1 q_2)}{1 - 2(q_2^2 + q_3^2)} \right)
 \end{aligned}
 \tag{5.29}$$

La rotation $\mathbf{q}_{1 \rightarrow 3}$ permettant de passer du repère 1 au repère 3 obtenue par deux rotations consécutives $\mathbf{q}_{2 \rightarrow 3}$ et $\mathbf{q}_{1 \rightarrow 2}$ s'exprime :

$$\mathbf{q}_{1 \rightarrow 3} = \mathbf{q}_{2 \rightarrow 3} \cdot \mathbf{q}_{1 \rightarrow 2}
 \tag{5.30}$$

Ainsi, la composition des rotations est obtenue par multiplication de deux quaternions.

2.4.3. Propagation du quaternion d'attitude

L'évolution du quaternion d'attitude en fonction de la vitesse angulaire de la Fusée est gouvernée par une équation différentielle pouvant se mettre sous la forme :

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_f \cdot \mathbf{q}
 \tag{5.31}$$

Avec

$$\boldsymbol{\Omega}_f = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{fx} & -\omega_{fy} & -\omega_{fz} \\ \omega_{fx} & 0 & \omega_{fz} & -\omega_{fy} \\ \omega_{fy} & -\omega_{fz} & 0 & \omega_{fx} \\ \omega_{fz} & \omega_{fy} & -\omega_{fx} & 0 \end{bmatrix}
 \tag{5.32}$$

$\boldsymbol{\omega}_f = [\omega_{fx} \ \omega_{fy} \ \omega_{fz}]^T$, appelé *vecteur vitesse angulaire instantanée* (dans le repère de la Fusex), correspond à la valeur fournie par les gyromètres. En résolvant cette équation différentielle sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ (en considérant $\boldsymbol{\Omega}_f$ constant sur cet intervalle), il est possible d'écrire le modèle d'évolution du quaternion d'attitude suivant :

$$\mathbf{q}_{k+1} = e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_f\Delta t} \cdot \mathbf{q}_k \quad 5.33a$$

Le quaternion d'attitude initial \mathbf{q}_0 peut être calculé à partir des angles d'Euler décrivant l'attitude initiale de la Fusex (eq. 5.28). Comme nous le verrons lors de la suite de ce rapport, ceux-ci peuvent par exemple être estimés à partir des mesures de l'accéléromètre effectuées sur le pas de tir. Le quaternion \mathbf{q}_k permet de calculer la matrice de rotation $\mathbf{M}_{L \rightarrow f}$ (permettant en retour la transformation d'un vecteur exprimé dans le repère de la Fusex vers le repère global ENU) à chaque instant du vol. Afin de davantage simplifier les calculs, il est possible de linéariser localement l'équation (5.33a), ce qui nous permet d'obtenir :

$$\mathbf{q}_{k+1} = \left(\mathbf{I}_4 + \boldsymbol{\Omega}_f \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \frac{\mathbf{q}_k}{\|\mathbf{q}_{k+1}\|} \quad 5.33b$$

L'avantage de cette équation est que cette dernière ne fait pas appel à l'exponentielle de matrice $e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_f\Delta t}$ et est par conséquent plus rapide à exécuter. Toutefois, il est primordial d'être conscient que le corps des quaternions n'est pas fermé par l'opération sommation (en d'autres termes, si \mathbf{q}_k est un quaternion de rotation, \mathbf{q}_{k+1} calculé à l'aide de la relation (5.33b) ne sera pas un quaternion de rotation sur la sphère unité). Cela entraîne des erreurs et des divergences lors de l'intégration. Celle-ci est toutefois limitée par la normalisation du quaternion après chaque propagation.

Notez aussi que l'équation (5.33b) n'est pas simplement différentiable en raison du terme $1/\|\mathbf{q}_{k+1}\|$. Afin de contourner ce problème, nous avons posé le terme $\lambda_k = \frac{1}{\|\mathbf{q}_{k+1}\|} = 1/\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$. Ainsi, l'algorithme de propagation calcule d'abord une estimation du quaternion d'attitude

$$\mathbf{q}_{k+1}^e = \left(\mathbf{I}_4 + \boldsymbol{\Omega}_f \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \mathbf{q}_k \quad 5.34a$$

Ensuite, le terme $\lambda_k = 1/\|\mathbf{q}_{k+1}^e\|$ est calculé, ce qui permet de calculer le quaternion d'attitude final

$$\mathbf{q}_{k+1} = \lambda_k \mathbf{q}_{k+1}^e = \lambda_k \left(\mathbf{I}_4 + \boldsymbol{\Omega}_f \frac{\Delta t}{2} \right) \cdot \mathbf{q}_k \quad 5.34b$$

Le terme λ_k est ensuite utilisé afin de calculer le modèle linéarisé de la Fusex (Annexe 2).

2.4.4. Propagation de la vitesse et de la position :

Le calcul de la position et de la vitesse de la Fusex est fondé sur l'intégration des mesures de force spécifique $\boldsymbol{\gamma}_f$ fournies par les accéléromètres dans le repère R_f . Le modèle de vitesse et de position de la Fusex peut ainsi être exprimé dans le repère global :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \Delta t \quad 5.35a$$

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \mathbf{M}_{L \rightarrow f} \boldsymbol{\gamma}_k \Delta t \quad 5.35b$$

2.4.5. Modèle de l'atmosphère

Comme nous l'avons vu Section V.2.1, la navigation inertielle à elle seule ne permet pas d'obtenir la précision requise pour notre application. Ainsi, nous avons couplé le modèle précédent à un modèle atmosphérique permettant de relier la pression et la température en fonction de l'altitude : Le modèle ISA (ou *US Standard Atmosphere*). Ce dernier exprime la température de l'atmosphère comme une fonction linéaire de l'altitude z par tronçons :

$$T(z) = T_0 + T_z \cdot (z - z_0) \quad 5.36$$

Les valeurs T_0 et T_z sont tabulées en fonction de z_0 et permettent de déterminer la température théorique de l'atmosphère en fonction de l'altitude. L'évolution de la pression atmosphérique est décrite selon l'équation différentielle suivante :

$$dp = -\rho g dz \quad 5.37$$

En exprimant la masse volumique ρ en fonction de la température, nous obtenons :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g dz}{r(T_0 + T_z \cdot z)} \quad 5.38$$

L'équation (5.38) présente deux solutions en fonction de la valeur de T_z :

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{g}{rT_0}(z-z_0)} \quad \text{si } T_z = 0 \quad 5.39a$$

$$p(z) = p_0 \left(1 + \frac{T_z}{T_0}(z - z_0)\right)^{-\frac{g}{rT_0}} \quad \text{si } T_z \neq 0 \quad 5.39b$$

Les valeurs de p_0 sont une fois de plus tabulées en fonction de z_0 . Les valeurs prises pour notre modèle sont fournies en Annexe 1. Ce modèle atmosphérique nous permet ainsi de calculer les mesures attendues de pression et de température en fonction du vecteur d'état \mathbf{x}_k de notre Fusex.

Toutefois, des analyses supplémentaires ont révélé le manque de précision important du modèle ISA, ce qui nécessite l'application de méthodes supplémentaires de calibrations et de correction des mesures (voir section V.5.2.2). L'étude approfondie d'autres modèles atmosphériques (tel que le modèle *MSISE-90* par exemple) pourraient permettre l'obtention de résultats plus précis.

2.4.6. Modèle magnétique

L'utilisation d'un magnétomètre permet d'apporter une information supplémentaire concernant l'orientation absolue de la Fusex. Dans le cadre de ce projet, nous avons modélisé le champ magnétique terrestre par le vecteur :

$$\mathbf{m}_L = m_{L0} \begin{bmatrix} \cos \delta_m \sin \sigma_m \\ \cos \delta_m \cos \sigma_m \\ -\sin \delta_m \end{bmatrix} \quad 5.40$$

Avec δ_m l'inclinaison et σ_m déclinaison magnétique, dépendants de la latitude et de la longitude. Etant donné la courte distance parcourue par la Fusex, nous avons considéré ces angles constants au cours du vol. Nos recherches ont toutefois montré l'intérêt de d'utiliser des modèles magnétiques plus précis (tel que le modèle WMM2020) afin d'ajouter, entre autres, des informations concernant la position absolue de la Fusex.

En prenant la norme des mesures du champ magnétique, nous obtenons le vecteur direction du champ magnétique dans le repère de la Fusex :

$$\mathbf{m}_f = \mathbf{M}_{f \rightarrow L} \begin{bmatrix} \cos \delta_m \sin \sigma_m \\ \cos \delta_m \cos \sigma_m \\ -\sin \delta_m \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{L \rightarrow f}^T \begin{bmatrix} \cos \delta_m \sin \sigma_m \\ \cos \delta_m \cos \sigma_m \\ -\sin \delta_m \end{bmatrix} \quad 5.41$$

Ce qui nous permet de prédire les mesures de la direction du champ magnétique en fonction de l'attitude de la Fusex. Toutefois, ce système ne nous permet pas de d'observer les rotations autour de l'axe défini par la direction du champ magnétique. Ainsi, il serait nécessaire d'ajouter un capteur d'une autre nature afin de contraindre l'orientation de la Fusex pour de futurs projets (capteur de luminosité pour afin d'estimer la direction du soleil, ...).

2.4.7. Modèle complet de navigation de la Fusex

Notre démarche précédente nous a permis de déterminer la relation entre l'état de la Fusex et les différentes mesures fournies par les capteurs embarqués à bord de la Fusex. En effectuant l'inventaire des variables d'état intervenant au sein des modèles précédents, il est possible de construire le vecteur d'état, le vecteur des entrées et le vecteur des mesures suivants :

$$\mathbf{x}(t) = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ x_L \ y_L \ z_L \ v_{x,L} \ v_{y,L} \ v_{z,L}]^T \quad 5.42a$$

$$\mathbf{u}(t) = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z \ \gamma_x \ \gamma_y \ \gamma_z]^T \quad 5.42b$$

$$\mathbf{z}(t) = [x_{GPS} \ y_{GPS} \ z_{GPS} \ m_x \ m_y \ m_z \ P \ T]^T \quad 5.42c$$

Le GPS que nous possédions ne permettant pas la mesure de la vitesse, nous n'étions pas en mesure d'intégrer la vitesse v_L au vecteur des mesures. Il est toutefois concevable de se procurer un GPS permettant l'estimation de la vitesse de la Fusex, ce qui permet d'améliorer considérablement les performances du filtre.

Afin d'estimer en temps réel les biais de mesures des différents capteurs, nous avons ajouté les variables $\Delta \mathbf{m}^k$, $\Delta \boldsymbol{\gamma}^k$, $\Delta \boldsymbol{\omega}^k$, ΔP^k et ΔT^k représentant les estimations des biais de mesure sur le magnétomètre, l'accéléromètre, le gyromètre, le capteur de pression et le capteur de température.

Cela nous permet finalement d'obtenir le vecteur d'état suivant :

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} q_0^k \\ q_1^k \\ q_2^k \\ q_3^k \\ x_L^k \\ y_L^k \\ z_L^k \\ v_{x,L}^k \\ v_{y,L}^k \\ v_{z,L}^k \\ \Delta\omega_x^k \\ \Delta\omega_y^k \\ \Delta\omega_z^k \\ \Delta\gamma_x^k \\ \Delta\gamma_y^k \\ \Delta\gamma_z^k \\ \Delta m_x^k \\ \Delta m_y^k \\ \Delta m_z^k \\ \Delta T^k \\ \Delta P^k \end{bmatrix} \quad 5.43$$

La prise en compte des modèles précédents nous permet de construire le **modèle d'évolution** :

$$q_0^{k+1} = q_0^k + \frac{\Delta t}{2} (-q_1^k(\omega_x^k - \Delta\omega_x^k) - q_2^k(\omega_y^k - \Delta\omega_y^k) - q_3^k(\omega_z^k - \Delta\omega_z^k))$$

$$q_1^{k+1} = q_1^k + \frac{\Delta t}{2} (q_0^k(\omega_x^k - \Delta\omega_x^k) - q_3^k(\omega_y^k - \Delta\omega_y^k) + q_2^k(\omega_z^k - \Delta\omega_z^k))$$

$$q_2^{k+1} = q_2^k + \frac{\Delta t}{2} (q_3^k(\omega_x^k - \Delta\omega_x^k) + q_0^k(\omega_y^k - \Delta\omega_y^k) - q_1^k(\omega_z^k - \Delta\omega_z^k))$$

$$q_3^{k+1} = q_3^k + \frac{\Delta t}{2} (-q_2^k(\omega_x^k - \Delta\omega_x^k) + q_1^k(\omega_y^k - \Delta\omega_y^k) + q_0^k(\omega_z^k - \Delta\omega_z^k))$$

$$x_L^{k+1} = x_L^k + v_{x,L}^k \Delta t$$

$$y_L^{k+1} = y_L^k + v_{y,L}^k \Delta t$$

$$z_L^{k+1} = z_L^k + v_{z,L}^k \Delta t$$

$$v_{x,L}^{k+1} = v_{x,L}^k + \left(M_{11}^k(\gamma_x^k - \Delta\gamma_x^k) + M_{12}^k(\gamma_y^k - \Delta\gamma_y^k) + M_{13}^k(\gamma_z^k - \Delta\gamma_z^k) \right) \Delta t$$

$$v_{y,L}^{k+1} = v_{y,L}^k + \left(M_{21}^k(\gamma_x^k - \Delta\gamma_x^k) + M_{22}^k(\gamma_y^k - \Delta\gamma_y^k) + M_{23}^k(\gamma_z^k - \Delta\gamma_z^k) \right) \Delta t$$

$$v_{z,L}^{k+1} = v_{z,L}^k + \left(M_{31}^k(\gamma_x^k - \Delta\gamma_x^k) + M_{32}^k(\gamma_y^k - \Delta\gamma_y^k) + M_{33}^k(\gamma_z^k - \Delta\gamma_z^k) - g \right) \Delta t$$

$$\Delta\omega_x^{k+1} = \Delta\omega_x^k$$

$$\Delta\omega_y^{k+1} = \Delta\omega_y^k$$

$$\Delta\omega_z^{k+1} = \Delta\omega_z^k$$

$$\Delta\gamma_x^{k+1} = \Delta\gamma_x^k$$

$$\Delta\gamma_y^{k+1} = \Delta\gamma_y^k$$

$$\Delta\gamma_z^{k+1} = \Delta\gamma_z^k$$

$$\Delta m_x^{k+1} = \Delta m_x^k$$

$$\Delta m_y^{k+1} = \Delta m_y^k$$

$$\Delta m_z^{k+1} = \Delta m_z^k$$

$$\Delta T^{k+1} = \Delta T^k$$

$$\Delta P^{k+1} = \Delta P^k$$

Ainsi que le **modèle de mesure** :

$$\lambda_{GPS}^k = \text{to_longitude}(x_L^k, y_L^k)$$

$$\phi_{GPS}^k = \text{to_latitude}(x_L^k, y_L^k)$$

$$z_{GPS}^k = z_L^k$$

$$m_x^k = M_{11}^k \cos \delta_m \sin \sigma_m + M_{21}^k \cos \delta_m \cos \sigma_m - M_{31}^k \sin \delta_m - \Delta m_x^k$$

$$m_y^k = M_{12}^k \cos \delta_m \sin \sigma_m + M_{22}^k \cos \delta_m \cos \sigma_m - M_{32}^k \sin \delta_m - \Delta m_y^k$$

$$m_z^k = M_{13}^k \cos \delta_m \sin \sigma_m + M_{23}^k \cos \delta_m \cos \sigma_m - M_{33}^k \sin \delta_m - \Delta m_z^k$$

$$P^k = \text{ISA_Pressure}(z_L^k) - \Delta P^k$$

$$T^k = \text{ISA_Temperature}(z_L^k) - \Delta T^k$$

Avec

$$\mathbf{M}_{f \rightarrow L} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

5.44

Comme énoncé précédemment, le modèle précédent est un modèle non linéaire, et une étape supplémentaire de linéarisation est nécessaire afin d'obtenir les matrices \mathbf{F}_k , \mathbf{B}_k et \mathbf{H}_k (Annexe 2).

2.5. Matrices de covariance

Les matrices de covariance \mathbf{R}_k et \mathbf{Q}_k jouent un rôle important dans la dynamique et la stabilité de l'algorithme d'estimation. Intuitivement, les matrices de covariance du modèle et de mesure peuvent être assimilées à des facteurs de pondération permettant à l'algorithme de déterminer l'importance relative des mesures et du modèle lors de l'estimation du vecteur d'état. La matrice de covariance d'un vecteur aléatoire \mathbf{v} s'écrit

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (v_i^k - \langle v_i \rangle)(v_j^k - \langle v_j \rangle) \quad 5.45$$

Plus les éléments de la matrice de covariance seront élevés, plus les erreurs associées à ces éléments sont importantes, et donc moins le filtre de Kalman leur accordera d'importance.

Dans le cas de notre système, nous supposons la matrice de covariance des bruits de mesure diagonale (ce qui revient à considérer les mesures de chaque axe comme indépendantes). Ainsi, nous obtenons la matrice :

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \sigma_{GPS}^2 & & & \\ & \sigma_m^2 & & \\ & & \sigma_p^2 & \\ & & & \sigma_T^2 \end{bmatrix} \quad 5.46$$

Les éléments de la matrice \mathbf{R}_k peuvent être estimés à partir d'un ensemble de N mesures statiques effectuées quelques secondes en amont du lancement (afin de limiter les erreurs d'estimation de la matrice de covariance due à la température).

La matrice de covariance des bruits du modèle dépend à la fois des entrées du système et des erreurs d'estimation des paramètres. Il est possible de définir la matrice \mathbf{Q}_k tel que

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k^D + \mathbf{B}_k \Sigma_\gamma \mathbf{B}_k^T \quad 5.47$$

Avec :

$$\mathbf{Q}_k^D = 1 \cdot 10^{-6} \cdot \mathbf{I}_{21 \times 21} \quad 5.48a$$

$$\Sigma_\gamma = \begin{bmatrix} \sigma_{\gamma,x}^2 & & \\ & \sigma_{\gamma,y}^2 & \\ & & \sigma_{\gamma,z}^2 \end{bmatrix} \quad 5.48b$$

$$\mathbf{B}_k^{ij} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_k^j} \right]_{\substack{i \in [1,n] \\ j \in [1,m]}} \quad 5.48c$$

Enfin, la valeur initiale de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $\hat{\mathbf{P}}_{0|0}$ permet de définir le niveau de confiance accordé à l'estimation initiale du vecteur d'état $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$. Dans le cadre de l'application présentée au sein de ce rapport, la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $\hat{\mathbf{P}}_{0|0}$ est supposée diagonale telle que :

$$\hat{\mathbf{P}}_{0|0} = 1 \cdot 10^{-6} \cdot \mathbf{I}_{21 \times 21} \quad 5.49$$

Dans la pratique, plus les valeurs des éléments de la matrice $\hat{\mathbf{P}}_{0|0}$ sont importantes, plus le filtre de Kalman sera réactif lors des premiers instants suivant la mise en fonctionnement du filtre (ce qui peut notamment entraîner des instabilités).

3. Simulation de la trajectoire de la Fusex

Afin de valider le modèle d'évolution de la Fusex, nous avons développé un modèle de simulation de vol permettant la propagation du vecteur d'état. Le nouveau vecteur d'état fut adapté afin d'ajouter les termes d'accélération et de vitesse angulaire, et de retirer les termes liés aux erreurs de mesure (non nécessaires dans le cas de cette simulation) :

$$\mathbf{x}(t) = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z \ x_L \ y_L \ z_L \ v_{x,L} \ v_{y,L} \ v_{z,L} \ \gamma_x \ \gamma_y \ \gamma_z]^T \quad 5.46$$

Ce vecteur d'état nous permet entre autres de simuler l'évolution de l'accélération de la Fusex en fonction de la poussée du moteur (vecteur des entrées) :

$$\mathbf{u}(t) = F_p(t) = [F_x \ F_y \ F_z]^T \quad 5.47$$

3.1. Modèle d'évolution

Reprenons le schéma précédent :

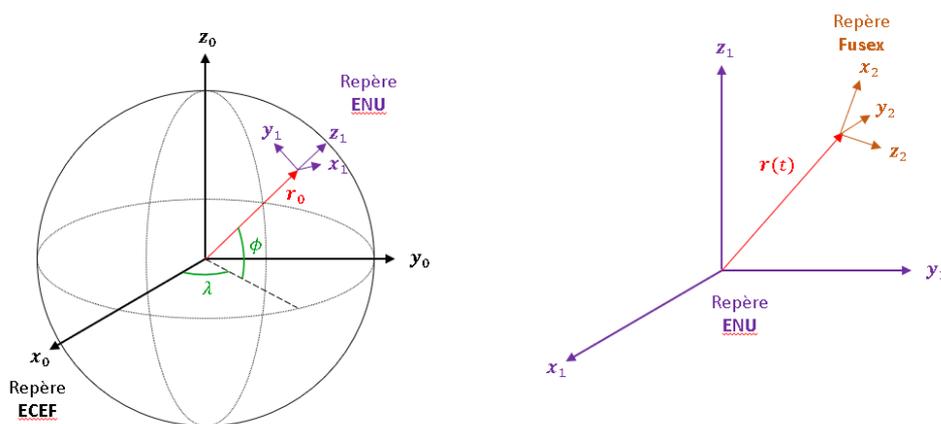


Figure 5.4 : Repères de calcul

Contrairement au filtre de Kalman, les calculs de la simulation seront réalisés dans le repère *ECEF* en raison de sa plus grande versatilité (possibilité de simulation en terre tournante, utilisation du modèle WMM, ...).

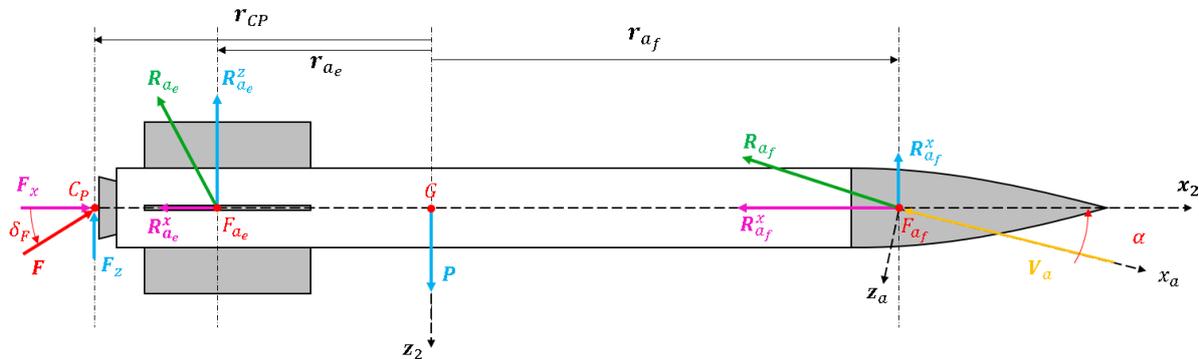


Figure 5.5 : Bilan des efforts appliqués sur la Fusex

Après analyse, nous obtenons le bilan des forces (repère Fusex) de la figure 5.5. Nous noterons R_{ae} l'effort aérodynamique lié à un empennage, R_{af} l'effort aérodynamique lié au fuselage, V_a la vitesse aérodynamique, α l'incidence, P le poids, F la poussée et δ_F le calage moteur. Bien que le schéma soit uniquement en deux dimensions, l'implémentation finale de notre modèle est tridimensionnelle.

Ainsi, nous obtenons en appliquant le principe fondamental de la dynamique :

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{M} (\mathbf{F} + \mathbf{R}_{ae} + \mathbf{R}_{af} + \mathbf{P})$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{q}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{I} (\mathbf{r}_{CP} \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_{ae} \times \mathbf{R}_{ae} + \mathbf{r}_{af} \times \mathbf{R}_{af})$$

L'étape suivante consiste à déterminer les efforts F , R_{ae} , R_{af} et P en fonction des variables d'état du système.

3.2. Modèle de poussée

La première étape de notre démarche consiste à développer un modèle de poussée du moteur de la Fusex : le moteur *Pro54-5G C*. Nous avons approximé la loi de poussée du moteur en effectuant une interpolation dans une table de poussée (t_k , F_k).

Cette table de poussée fut estimée à l'aide des résultats fournis par Stabtraj.

t_k	0.00	0.060	0.280	0.5000	1.0000	3.0000	3.59
F_k	0.00	891.9	845.5	799.06	739.59	396.13	0.00

Tableau 5.1 : Table de poussée du moteur de la Fusex Prométhée (*Pro54-5G C*)

3.3. Modèle aérodynamique

Le modèle aérodynamique simplifié de notre Fusex nous permet d'estimer les efforts aérodynamiques R_{a_e} et R_{a_f} en fonction du vecteur d'état $x(t)$. Tout d'abord, la vitesse aérodynamique peut être décomposée en fonction de la vitesse du vent v_{wind} et la vitesse de la Fusex v :

$$V_a = v_{wind} - v \quad 5.48$$

Notre implémentation permet l'utilisation de plusieurs modèles de vent (linéaires, tables de vent...), mais par manque de données, nous avons fixé $v_{wind} = \mathbf{0}$, ce qui nous permet d'obtenir la relation simple :

$$V_a = -v \quad 5.49$$

Nous pouvons ainsi exprimer les efforts aérodynamiques liés au fuselage dans le trièdre aérodynamique de la Fusex :

$$R_a^x = -\frac{1}{2}\rho(z)S_{ref}v^2C_x \quad 5.50a$$

$$R_a^y = -\frac{1}{2}\rho(z)S_{ref}v^2C_{y,\beta}(\beta - \beta_0) \quad 5.50b$$

$$R_a^z = -\frac{1}{2}\rho(z)S_{ref}v^2C_{z,\alpha}(\alpha - \alpha_0) \quad 5.50c$$

Dans notre cas, la masse volumique de l'air $\rho(z)$ fut déterminée grâce au modèle atmosphérique ISA en considérant la loi des gaz parfaits :

$$\rho(z) = \frac{P(z)}{rT(z)} \quad 5.51$$

Les valeurs des coefficients du modèle ISA sont disponibles en annexe (Annexe 1). Concernant la surface de référence, nous prendrons la section au maitre couple pour les coefficients aérodynamiques associés au fuselage, et la section latérale des plaques pour les ailerons. Afin d'estimer les valeurs des coefficients aérodynamiques, nous avons pris $C_{y,\beta} = C_{z,\alpha}$ pour le corps central (par symétrie du fuselage), et $C_{y,\beta} = 0 / C_{z,\alpha} = 2\pi \text{ rad}^{-1}$ (en supposant l'incidence faible) pour les plaques.

Coefficients aérodynamiques	Corp central (fuselage)	Ailerons (x4)
$C_x [-]$	0.15	0.1
$C_{y,\beta} [\text{rad}^{-1}]$	2.0	0.0
$C_{z,\alpha} [\text{rad}^{-1}]$	2.0	2π

Tableau 5.2 : Coefficients aérodynamiques de la Fusex utilisés lors de la simulation.

Les valeurs de coefficients fournies dans le tableau 5.2 ont été estimées à partir de la théorie des plaques planes et grâce aux valeurs fournies par StabTraj.

Ainsi, la procédure de calcul des efforts aérodynamiques consiste à calculer en premier lieu ces derniers dans le trièdre aérodynamique à l'aide des équations (3.50a-b-c). Ensuite, un changement de repère est appliqué afin de déterminer les efforts dans le référentiel de la Fusex, puis dans le repère ECEF. La transformation permettant de transformer le vecteur des efforts aérodynamiques F_a du repère aérodynamique vers le repère de la Fusex est donnée par l'équation (3.38).

$$M_{aero \rightarrow fusex} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad 5.52$$

Il est important de noter que ce modèle aérodynamique est fondé sur un grand nombre de simplifications, et possède par conséquent une précision limitée. En revanche, ce dernier permet de rendre compte des principaux phénomènes aérodynamiques agissant sur la Fusex permettant, entre autres, de garantir sa stabilité.

3.4. Résultats

Lors des sections précédentes, nous avons formulé les relations fondamentales du filtre de Kalman ainsi que les modèles de simulation et de mesure de la Fusex. Afin de valider ces derniers, nous avons implémenté une librairie de simulation Python permettant de calculer les prédictions théoriques de notre modèle.

3.4.1. Simulation du vol de la Fusée expérimentale

La simulation fut réalisée en considérant la configuration suivante :

Paramètre	Notation	Valeur	Unité
Masse de la Fusex	M	6.0	kg
Longueur de la Fusex	L	2097.0	mm
Abscisse centre de poussée	x_{CP}	0.0	mm
Abscisse foyer aérodynamique fuselage	x_{af}	1572.0	mm
Abscisse foyer aérodynamique empennage	x_{ae}	285.0	mm
Abscisse centre de gravité	x_G	814.5	mm
Inertie roulis	I_{xx}	0.0213	$kg.m^{-4}$
Inertie tangage	I_{yy}	2.2093	$kg.m^{-4}$
Inertie lacet	I_{zz}	2.2093	$kg.m^{-4}$
Surface empennage (1x plaque)	S_e	0.0288	m^2
Surface de référence fuselage	S_f	0.0106	m^2
Date de simulation	t_0	2022.5242	$an.$
Attitude initiale (ENU)	Θ_0	[80, 0, 0]	deg
Longitude pas de tir	λ_0	-0.062	deg
Latitude pas de tir	ϕ_0	43.21	deg
Altitude pas de tir	z_0	436.0	m

Tableau 5.3 : Valeurs des paramètres de la simulation

Nous avons supposé le calage moteur non nul (0.025 degrés selon l'axe de tangage) et nous avons négligé les effets du vent. Le parachute n'est pas pris en compte lors de cette simulation. Nous obtenons ainsi les résultats suivants :

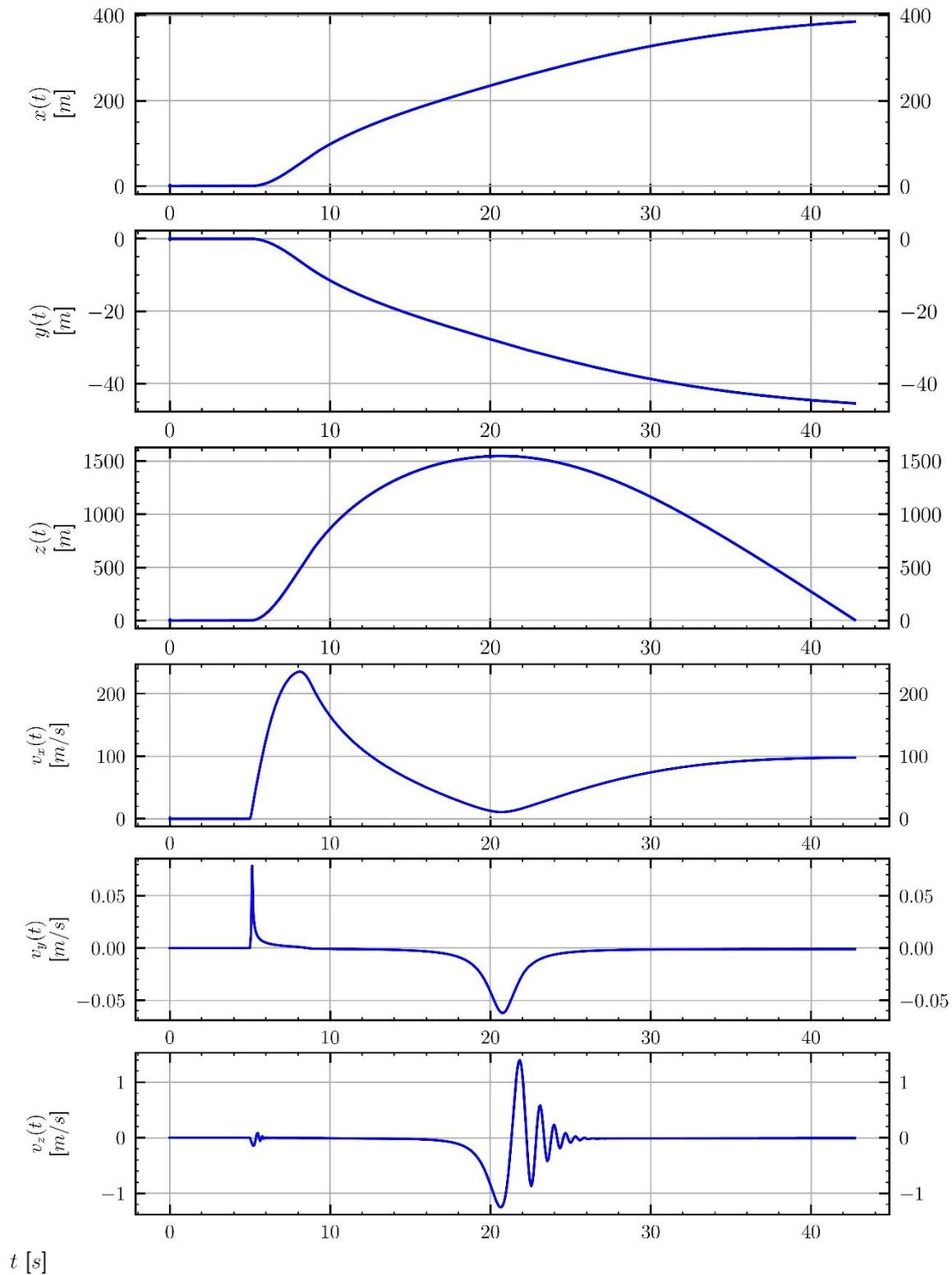


Figure 5.6 : Position (ENU) et vitesse (repère Fuser) simulées de la Fuser. Nous observons une altitude maximale de l'ordre de 1600m, ce qui est en accord avec les prédictions du modèle de vol StabTraj.

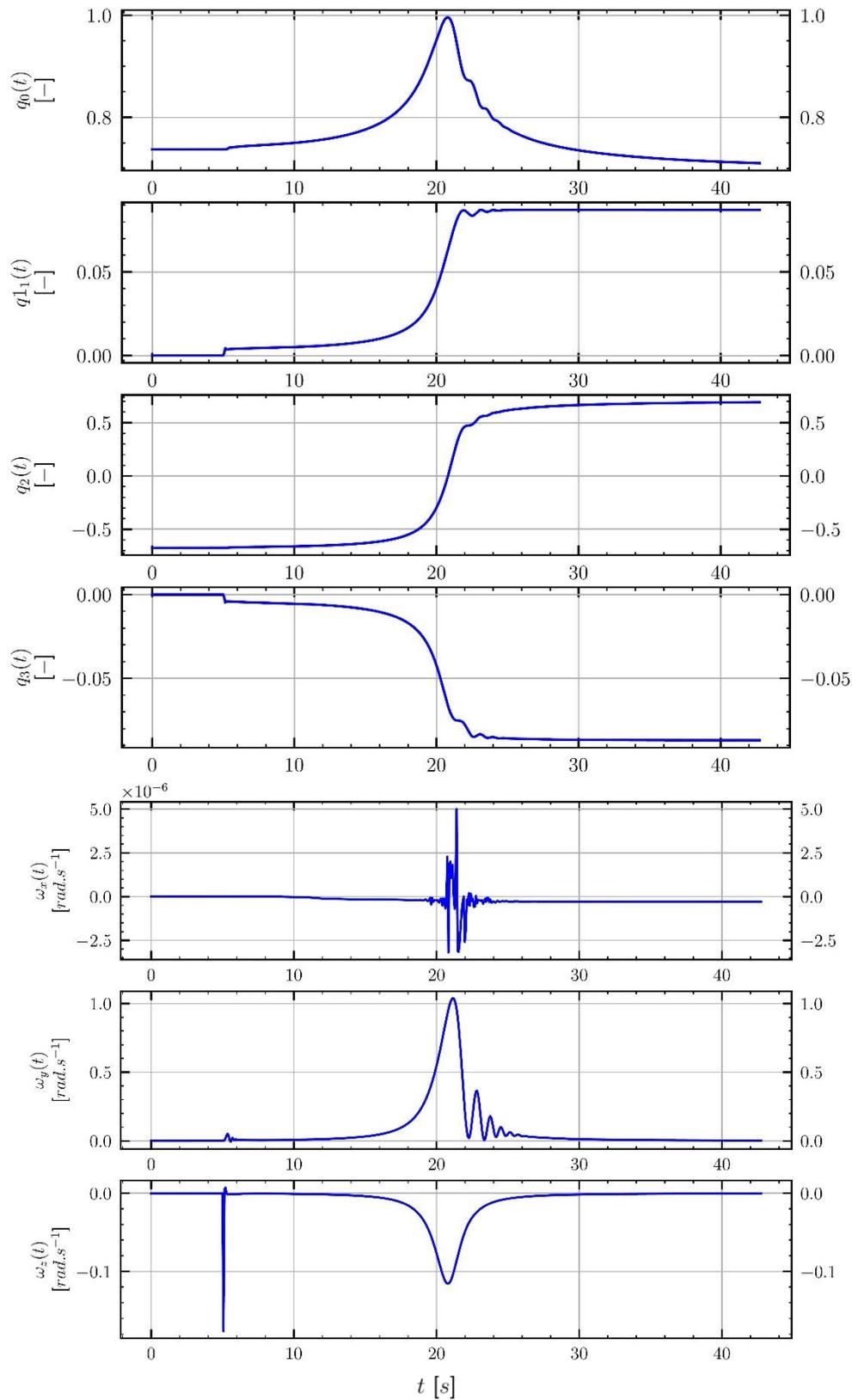


Figure 5.7 : Attitude (quaternion) et vitesse angulaire (repère Fusex) simulées de la Fusex.

3.4.2. Application du filtre de Kalman

Après propagation à l'aide du simulateur, nous obtenons un ensemble de vecteurs d'états de référence \mathbf{x}_k à chaque instant t_k du vol. Afin de tester notre filtre de Kalman, nous avons appliqué ce dernier aux résultats de la simulation. Ainsi, en ajoutant un module permettant la simulation des mesures des capteurs embarqués sur la Fusex, il est possible de tester notre programme à l'aide de données proches des conditions réelles du vol.

En raison de la complexité du modèle, de la contrainte temporelle et du faible nombre de personnes impliquées dans le développement de l'expérience, nous avons simplifié le filtre de Kalman afin d'effectuer les tests. Il est possible, uniquement grâce aux mesures du GPS et de la pression, de fournir une estimation de l'accélération dans le repère ENU indépendamment de la mesure des accéléromètres $\mathbf{f}_m = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{M}_{f \rightarrow L}^T \cdot \mathbf{g}$. Ainsi, en considérant l'estimation de l'accélération $\hat{\mathbf{T}}$ fournie par le GPS et le capteur de pression, nous avons posé :

$$\boldsymbol{\gamma}_f = \hat{\mathbf{T}} - \mathbf{f}_m = \mathbf{M}_{f \rightarrow L}^T \cdot \mathbf{g} \quad 5.53$$

Le magnétomètre permet d'obtenir une mesure de la direction du champ magnétique terrestre \mathbf{B}_f dans le repère de la Fusex tel que

$$\mathbf{B}_f = \mathbf{M}_{f \rightarrow L}^T \cdot \mathbf{B}_L \quad 5.54$$

Afin de simuler les mesures des différents capteurs, nous avons considéré le modèle d'erreur suivant

$$\boldsymbol{\gamma}_{fm}(t) = \mathbf{M}_{f \rightarrow L}^T(t) \cdot \mathbf{g} + \mathbf{b}_\gamma + \mathbf{v}_\gamma(t) \quad 5.55a$$

$$\mathbf{B}_{fm}(t) = \mathbf{M}_{f \rightarrow L}^T(t) \cdot \mathbf{B}_L + \mathbf{b}_B + \mathbf{v}_B(t) \quad 5.55b$$

$$\boldsymbol{\omega}_{fm}(t) = \boldsymbol{\omega}_f(t) + \mathbf{b}_\omega + \mathbf{v}_\omega(t) \quad 5.55c$$

Avec \mathbf{b}_γ , \mathbf{b}_B et \mathbf{b}_ω les biais de mesure des différents capteurs et $\mathbf{v}_\gamma(t)$, $\mathbf{v}_B(t)$ et $\mathbf{v}_\omega(t)$ les bruits de mesures (supposés gaussiens) de variance $\boldsymbol{\sigma}_\gamma$, $\boldsymbol{\sigma}_B$ et $\boldsymbol{\sigma}_\omega$. Lors de la simulation du filtre de Kalman, nous avons utilisé des valeurs réalistes de bruits de mesure et de biais afin d'obtenir des résultats représentatifs du système réel.

L'accéléromètre et le magnétomètre permettant l'estimation de la direction du champ gravitationnel et magnétique terrestre, nous avons normalisé ces mesures afin de permettre la comparaison directe entre les directions théoriques et mesurées.

Capteur	Notation	Valeur	Unité
Accéléromètre	\mathbf{b}_γ	$[0.02, 0.01, 0.02]^T$	—
	$\boldsymbol{\sigma}_\gamma$	$[0.072, 0.078, 0.069]^T$	—
Gyromètre	\mathbf{b}_ω	$[0.02, 0.02, 0.02]^T$	<i>deg/s</i>
	$\boldsymbol{\sigma}_\omega$	$[0.01, 0.012, 0.009]^T$	<i>deg/s</i>
Magnétomètre	\mathbf{b}_B	$[0.02, 0.02, 0.02]^T$	—
	$\boldsymbol{\sigma}_B$	$[0.011, 0.015, 0.012]^T$	—

Tableau 5.4 : Biais de mesure simulés des capteurs.

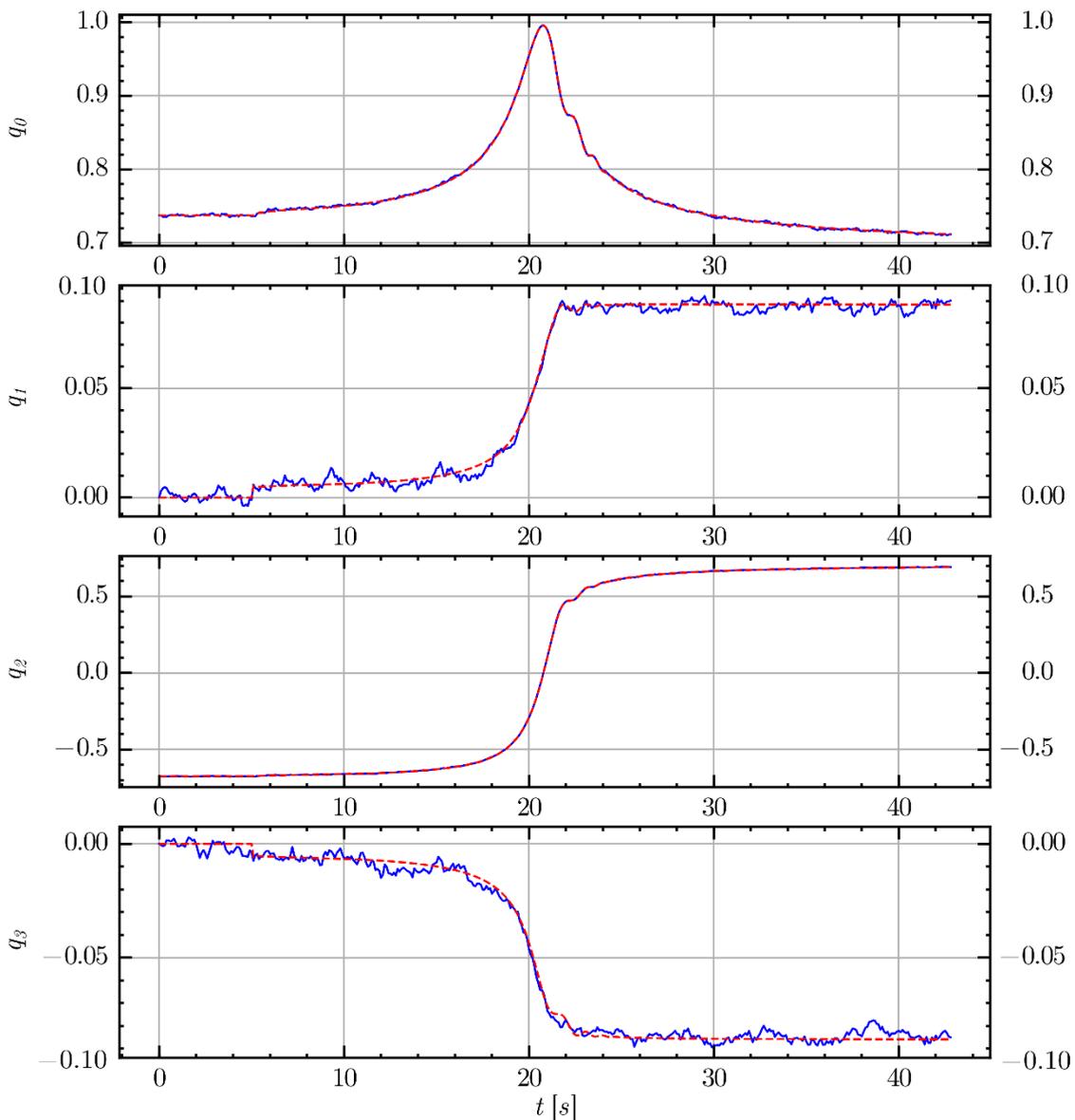


Figure 5.8 : comparaison entre le quaternion d'attitude simulé (en rouge) avec l'estimation fournie par le filtre de Kalman (en bleu).

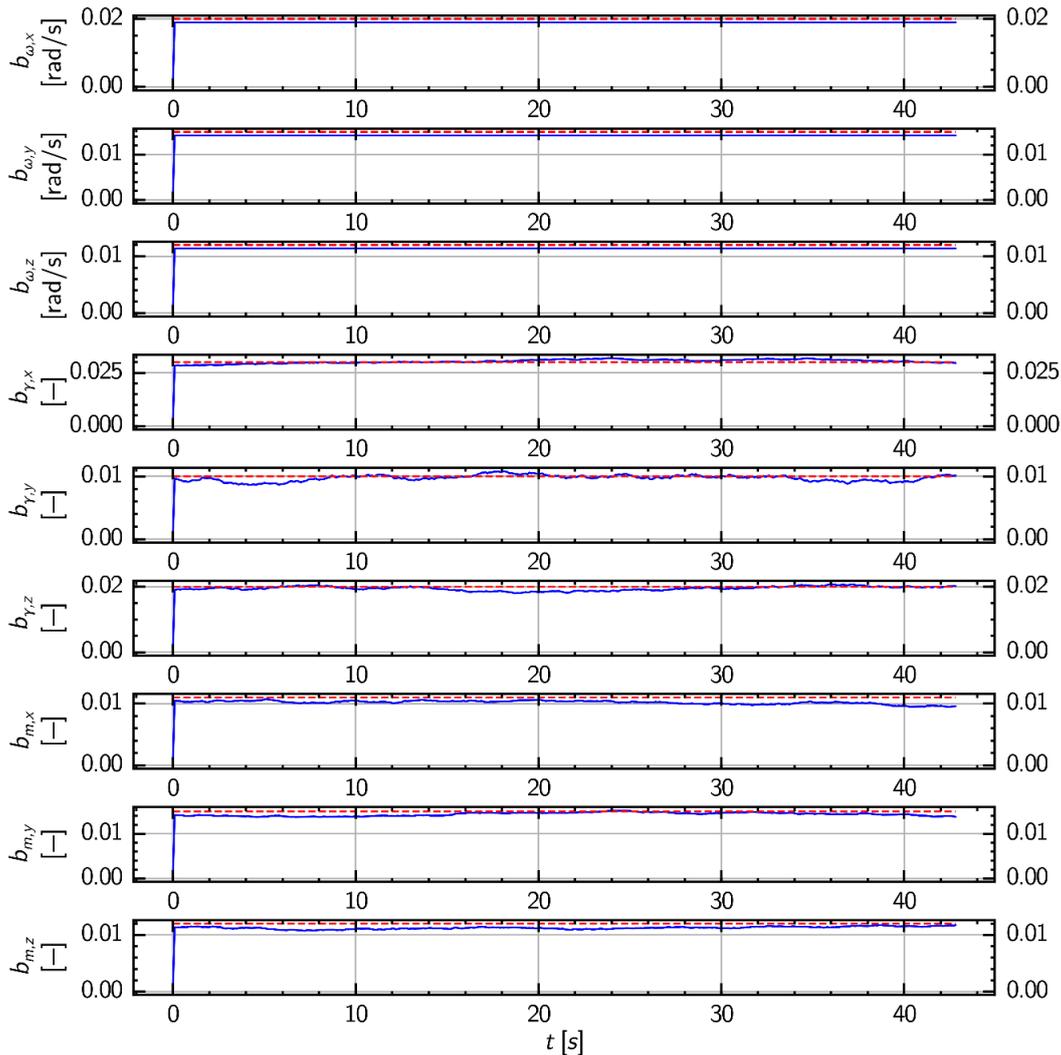


Figure 5.9 : comparaison entre les biais de mesure simulés (en rouge) avec l’estimation fournie par le filtre de Kalman (en bleu).

Les figures 5.8 et 5.9 montre que notre implémentation du filtre de Kalman fournit une bonne estimation du quaternion d’attitude de la Fusex au cours du vol simulé (sous l’hypothèse que nous soyons en mesure de déterminer précisément l’accélération de la Fusex grâce au GPS et au capteur de pression). En revanche, nous pouvons voir sur la figure 5.9 que l’algorithme n’est pas en mesure de totalement annuler le biais de mesure des différents capteurs, ce qui peut notamment poser des problèmes de fiabilité de l’estimation sur des vols de longue durée.

Ainsi, ces tests simplifiés montrent les performances qu’il est possible d’atteindre avec ce type de système. Toutefois, celles-ci seront fortement conditionnées par la qualité de l’estimation de l’accélération fournie par le filtre grâce aux GPS et au capteur de pression. En raison du manque de temps/ressources ainsi que du non-fonctionnement du GPS lors du lancement, nous n’avons pas été en mesure de terminer l’implémentation de l’estimateur de l’accélération absolue de la Fusex.

4. Système embarqué de mesure

L'objectif du système avionique de la Fusex consiste à acquérir les mesures des capteurs magnétiques, atmosphériques et inertiels de la Fusex et à les enregistrer sur une carte SD afin de permettre l'analyse des données au sol. Bien que l'objectif final du filtre de Kalman soit d'être intégré à bord d'une Fusex afin de fournir une estimation du vecteur d'état en temps réel ; le budget, les difficultés d'approvisionnement en composants ainsi que le nombre de membres actifs disponibles pour la conception de l'expérience nous ont conduits à abandonner l'implémentation temps réel du filtre de Kalman.

Notre première approche consistait à utiliser une carte Raspberry Pi Zéro 2 en tant qu'ordinateur de bord. Cette dernière aurait alors eu à charge la communication avec le système de mesure *Haute Fréquence* HF (Accéléromètre / Magnétomètre / Gyromètre / capteurs de pression) et le système de mesure *Basse Fréquence* BF (GPS). La pénurie de composant ayant rendu impossible l'acquisition de la carte Raspberry Pi, nous avons décidé de réaliser les tests du filtre de Kalman au sol après récupération des données lors du vol de la Fusex.

Lors de ce projet, la majorité de ces tâches furent réalisées par seulement deux membres (contre les 6-8 membres recommandés), ce qui a conduit le pôle à réaliser de nombreux compromis au cours du projet.

4.1. Système électronique

Le système embarqué de mesures de la Fusex conditionne la qualité de l'estimation fournie par le filtre de Kalman. Le pôle expérience disposait cette année d'un budget total de 100 euros pour la totalité de l'expérience. Cela a notamment été problématique lors du choix du GPS (dont les prix peuvent facilement varier entre 30 et 150 euros). Ainsi, la majorité des capteurs ont été choisis en raison de leur faible coût :

Capteur [-]	Mesure [-]	Quantité [-]	Prix unitaire [euros]
BMP280	P, T	1	3.75
MPU9250	$\gamma, \omega, \mathbf{B}_L$	2	5.20
Adafruit ultimate GPS	$\mathbf{x}_L, \mathbf{v}_L$	1	33.50
Cartes Arduino NANO	-	2	6.00
Cartes électroniques	-	2	8.00
Piles 9V	-	2	7.00
Carte SD + Lecteur	-	1	7.50
Total			97.15

Tableau 5.5 : Budget et prix des achats effectués par le pôle expérience.

Le système fut composé de deux cartes électroniques :

- Une carte *Maître*, chargée de l'acquisition et du prétraitement des données HF et BF.
- Une carte *Esclave*, chargée de l'enregistrement des données sur la carte SD.

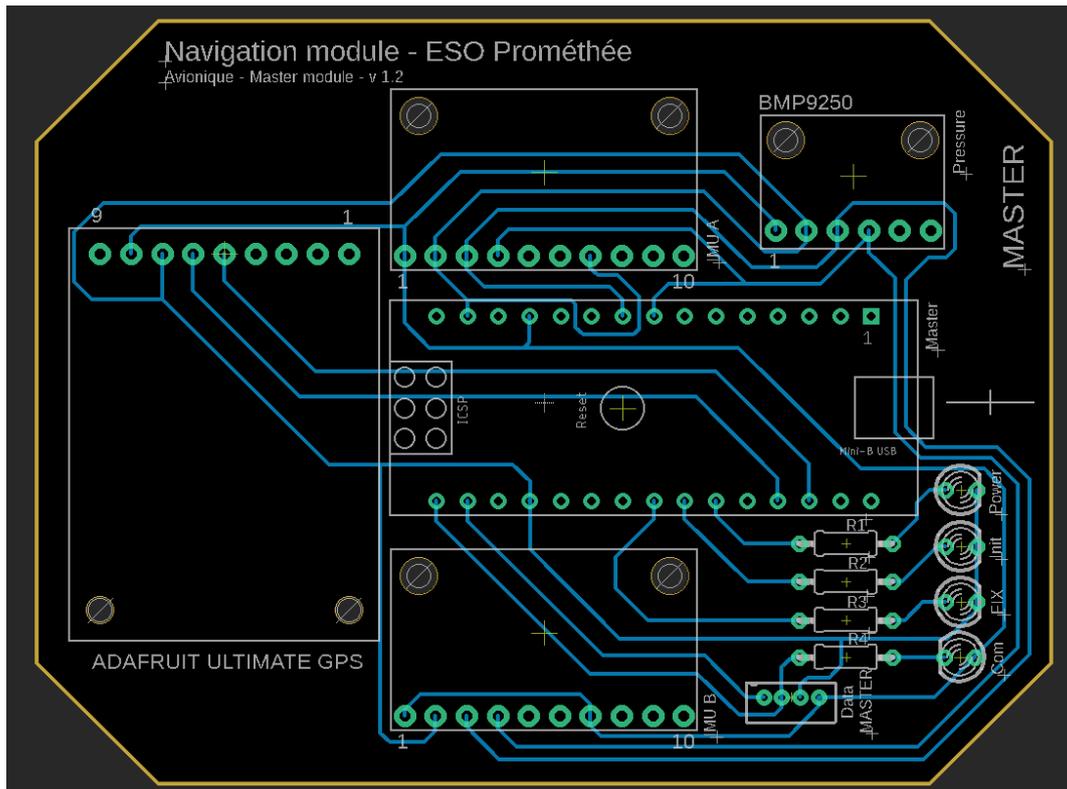


Figure 5.10 : PCB de la carte Maître.

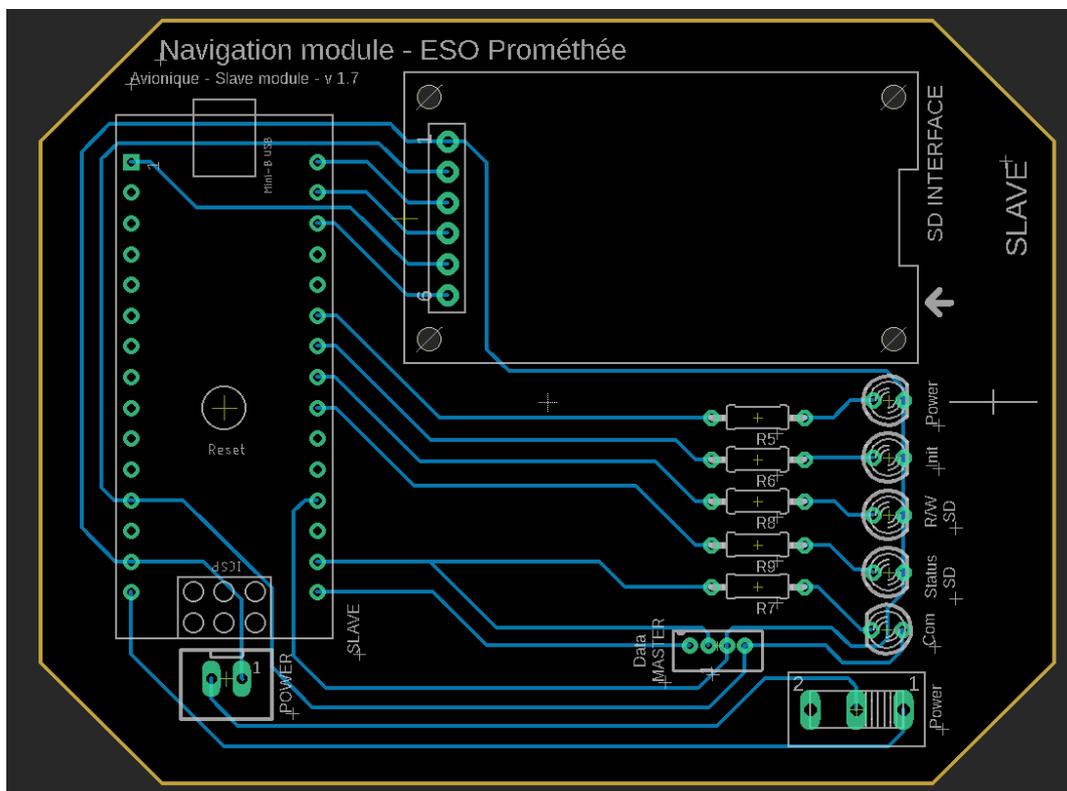


Figure 5.11 : PCB de la carte Esclave.

La conception des cartes fut réalisée en deux étapes consécutives. Tout d’abord, un premier prototype fut réalisé sur une carte de prototypage rapide. Cette étape nous a permis de réaliser une première étude des performances de notre système, de développer le logiciel de bord et de corriger les problèmes rencontrés. La seconde étape fut dédiée à la conception finale des cartes sur le logiciel Eagle PCB afin de réaliser les plans de fabrication du circuit imprimé (PCB). La fabrication des cartes fut sous-traitée à un fabricant chinois en raison du faible coût des cartes et des frais de port.

Lors de la conception des cartes, une grande attention fut portée au positionnement des composants. En effet, il fut nécessaire de placer le GPS le plus haut possible afin de faciliter le FIX (acquisition des données satellites) et de limiter les risques de décrochage lors du vol. D’autre part les centrales inertielles MPU9250 doivent être positionnées le plus proche possible du centre de gravité du système afin de faciliter la correction de l’accélération d’entraînement liée à la rotation de la Fusex :

$$\boldsymbol{\omega}_{f,IMU}(t) = \boldsymbol{\omega}_{f,G}(t) \quad 5.56a$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{f,IMU}(t) = \boldsymbol{\gamma}_{f,G}(t) + \boldsymbol{\alpha}_f \times \mathbf{r}_{G \rightarrow IMU} + \boldsymbol{\omega}_{f,G}(t) \times (\boldsymbol{\omega}_{f,G}(t) \times \mathbf{r}_{G \rightarrow IMU}) \quad 5.56b$$

Comme nous pouvons le voir équation (3.57b), la diminution de la distance $\mathbf{r}_{G \rightarrow IMU}$ entre le point de mesure et le centre de gravité réduit l’accélération parasite mesurée par la centrale inertielle. Il est important de noter qu’il existe d’autres sources d’erreur touchant les centrales inertielles strap-down (tel que le *sculling* ou le *coning*), mais ces derniers n’ont pas été pris en compte au sein de notre modèle (nous avons en effet supposé la phase ascensionnelle de la Fusex suffisamment stable). Ainsi, nous avons positionné les centrales inertielles symétriquement de part et d’autre de l’axe passant par le centre de gravité de la Fusex. Le capteur de pression et le GPS furent positionnés sur la carte mère afin de réduire le nombre de connecteurs nécessaires entre les deux cartes (et ainsi l’impédance de ligne et les sources d’interférence et de bruits parasites).

De nombreux voyants LED ont été positionnés sur les cartes afin de permettre un diagnostic rapide du statut du programme de vol. La connexion entre les deux cartes fut réalisée par un unique connecteur 4 fils permettant le passage des données séries (TX/RX) et de l’alimentation (VCC/GND).

4.2. Logiciel embarqué

Le logiciel de bord comporte cinq bibliothèques haute performances développées par le pôle expérience. Celles-ci permettent la communication avec les différents capteurs du système embarqué :

- Une bibliothèque I2C afin de communiquer avec les centrales inertielles et le capteur de pression.
- Une bibliothèque dédiée à la gestion des centrales inertielles (utilisant la bibliothèque I2C).
- Une bibliothèque dédiée à la gestion du capteur de pression (utilisant la bibliothèque I2C).
- Une bibliothèque dédiée à la communication avec le GPS.
- Une bibliothèque dédiée à la communication avec le lecteur SD.

La boucle de mesure du système fut conçue afin de permettre le fonctionnement quasi indépendant des deux cartes. La carte *Maitre* effectue une lecture des centrales inertielles et du capteur de pression. Dans le cas où une trame NMEA (GPS) est détectée dans le buffer du port série, la carte réalise une lecture et un décodage de cette dernière. Après lecture des capteurs, la carte *Maitre* envoie les données sur le port série commun aux deux systèmes. La carte *Esclave* effectue ainsi une lecture continue du port série en provenance de la carte maitre. Si une trame de données est détectée, la carte esclave copie les données dans la carte SD afin de stocker les données pour analyse.

4.3. Problèmes de conception et pistes d'amélioration

Malgré le bon fonctionnement du circuit et des logiciels, il existe tout de même de problèmes de conception :

- Par manque de ports série disponibles, la lecture du GPS fut réalisée à l'aide de la librairie SoftwareSerial Arduino permettant d'émuler un port série sur des entrées/sorties digitales de la carte. La fréquence du GPS étant proche du Hertz et la trame étant relativement longue (pouvant atteindre plus 250 caractères en fonction du type de trame NMEA), le buffer alloué par la librairie était insuffisant pour permettre le stockage d'une trame NMEA complète. Ainsi, il fut nécessaire de fortement réduire la fréquence de la boucle HF de la carte Maitre (5 Hz contre les 20 Hz possibles sans l'utilisation du GPS) afin de laisser le temps au logiciel de lire et traiter la trame NMEA. Une solution envisageable serait d'allouer une carte arduino BF complète a la lecture du GPS qui pourrait être lue toutes les secondes sans ralentir la boucle HF.
- La librairie SD Arduino ainsi que la carte utilisée souffrent de faibles performances lors de l'écriture, ce qui nous a une nouvelle fois conduit à réduire fortement la fréquence de mesure du système. Il existe d'autres types de librairies (SDFat, ...) et de cartes SD hautes performances permettant de stocker les données plus rapidement.
- La faible qualité des composants (et en particulier du GPS) réduit considérablement les performances globales de notre système. La mise en fonctionnement du GPS était particulièrement problématique en raison de son faible gain de réception (qui empêchait souvent d'effectuer le FIX satellite).
- Le capteur inertiel MPU9250 intègre un magnétomètre à adresse I2C fixe. Cela nous a malheureusement empêché d'utiliser deux magnétomètres simultanément (contrairement aux magnétomètres et accéléromètres). Une solution envisageable consisterait à utiliser un magnétomètre externe à adresse configurable permettant ainsi d'allouer une adresse différente à chaque composant.

5. Analyse des mesures obtenues lors du lancement

L'analyse des données obtenues à l'issue d'un vol nominal de la Fusex lors de la campagne de lancement du C'Space 2022 ont révélé un défaut de FIX du GPS avant le décollage. Ce dernier a empêché l'acquisition des données de position issue du GPS, ce qui a par la même occasion rendu impossible le test du module de navigation conçu lors de ce projet.

En effet, ce dernier nécessite plusieurs mesures de position absolue afin de corriger les biais de mesure de l'accéléromètre. Sans ces mesures, le système possèdera des performances identiques à celles obtenues dans le cas d'une intégration directe (voir Section V.2). Les autres capteurs du système avionique ont toutefois permis l'acquisition des mesures inertielles et atmosphériques au cours du vol. Afin de valider le principe de fonctionnement du système, nous avons tout de même décidé d'utiliser les mesures acquises afin de concevoir un filtre de Kalman étendu simplifié permettant l'estimation de l'altitude de la Fusex. Aussi, lors de cette section, nous proposons d'adapter le modèle construit précédemment à la détermination de l'altitude de la Fusex au cours du temps et de comparer les performances de ce système aux prédictions effectuées par le modèle StabTraj.

5.1. Filtre de Kalman Etendu (Altitude)

Pour cet ultime modèle, nous avons considéré le vecteur d'état suivant :

$$\mathbf{x}(t) = [\theta, z, \dot{z}]^T \quad 3.57$$

Ainsi que le vecteur des entrées suivant :

$$\mathbf{u}(t) = [\omega_{xy}, \gamma_z]^T \quad 3.58$$

Afin de simplifier le problème, nous avons défini :

- θ : angle relatif entre l'axe de la Fusex et le zénith (verticale locale)
- z : altitude de la Fusex au-dessus du pas de tir
- \dot{z} : taux de montée de la Fusex
- $\omega_{xy} = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$: vitesse angulaire selon la normale à la trajectoire de la Fusex
- $\gamma_z = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}_z = \gamma_{z,f} \cos \theta$: Accélération verticale de la Fusex

Le modèle d'évolution considéré pour ce problème fut le suivant :

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \omega_{xy}^k \Delta t_k \quad 3.59a$$

$$z_{k+1} = z_k + \dot{z}_k \Delta t_k \quad 3.59b$$

$$\dot{z}_{k+1} = \dot{z}_k + \gamma_z^k \Delta t_k \quad 3.59c$$

Ainsi, en posant :

$$\gamma_z^k = \gamma_{z,f}^k \cos \theta_k \quad 3.60$$

Où $\gamma_{z,f}^k$ correspond à la mesure selon l'axe z de l'accéléromètre (correspondant, par convention, à l'axe x de la Fusex). Le modèle de mesure considéré permet de relier l'altitude estimée à la mesure de pression effectuée par le capteur de pression en considérant le modèle atmosphérique ISA :

$$P_k = P_0 \left(1 + \frac{T_z}{T_0} (z_k - z_0) \right)^{-\frac{g}{rT_z}} \quad 3.61$$

Ainsi, nous obtenons le modèle linéarisé :

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3.62a$$

$$H_k = -g \frac{P_0}{rT_0} \left(1 + \frac{T_z}{T_0} (z_k - z_0) \right)^{-\frac{g}{rT_z} - 1} \quad 3.62b$$

5.2. Données de vol

L'ensemble des mesures s'étend sur une durée de 11500 secondes (soit 3.2 heures environ). La première étape de notre démarche consiste à identifier l'intervalle de mesure correspondant au vol de la Fusex. L'instant d'accélération maximale ($\gamma_z = 100m/s^2$) permet d'identifier l'allumage moteur, correspondant ainsi à l'instant t_0 du vol. Un second pic d'accélération selon l'axe x , correspondant alors à l'atterrissage de la Fusex ($\gamma_x = -75m/s^2$), est observable à l'instant $t = 4510s$. Ainsi, nous pouvons contraindre notre étude à l'intervalle $t \in [4150; 4510]s$, ce qui correspond à une durée de vol approximative de 4 minutes (ce qui est cohérent avec les mesures de temps de vol effectuées lors du lancement). Lors de la suite de notre étude, nous prendrons l'instant t_0 comme référence temporelle.

Les figures 5.12 présentent les mesures des accéléromètres, gyromètres et capteurs de pression/température effectuées lors du vol. Conformément aux prédictions du modèle ISA, nous observons une diminution de la température et de la pression lors de l'ascension de la Fusex. La détection de l'apogée est effectuée en prenant l'instant où $\gamma_{z,ENU} = 0$.

La seconde étape consiste à effectuer un pré-traitement des mesures afin de minimiser le bruit, les biais de mesures et les écarts liés au modèle atmosphérique et aux conditions lors du lancement.

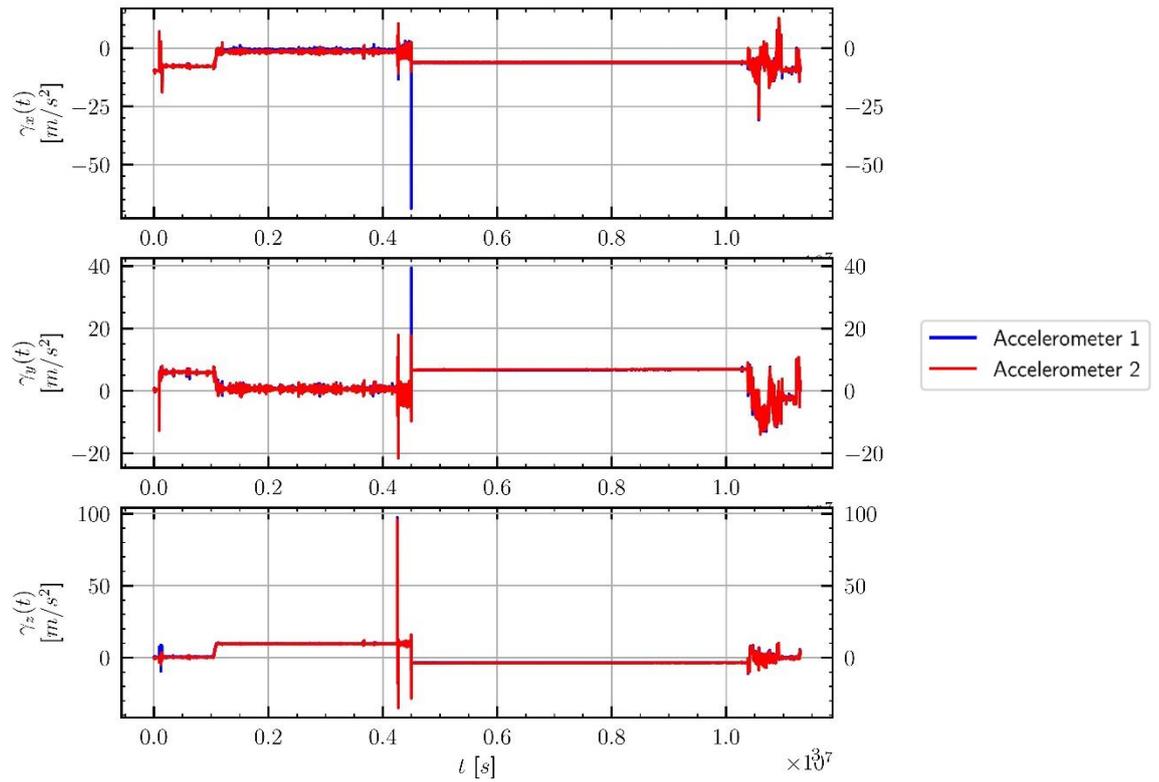


Figure 5.12 : Mesures accélérométriques effectuées lors de la campagne de lancement.

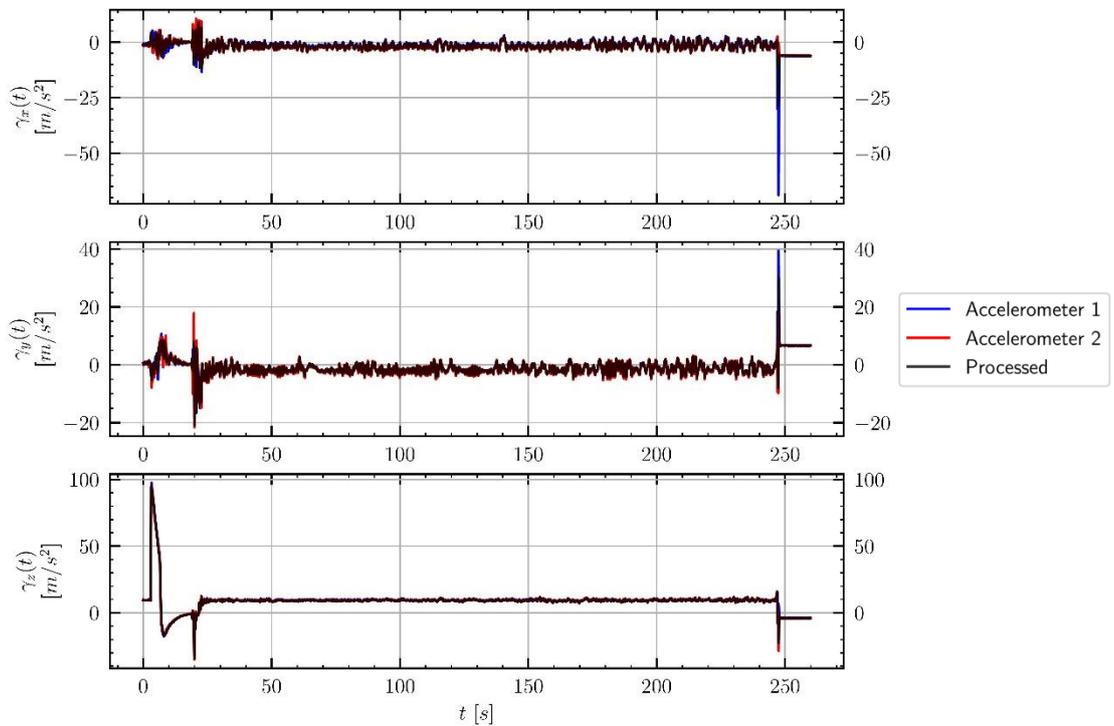


Figure 5.13 : Mesures accélérométriques effectuées lors du vol de la Fusex.

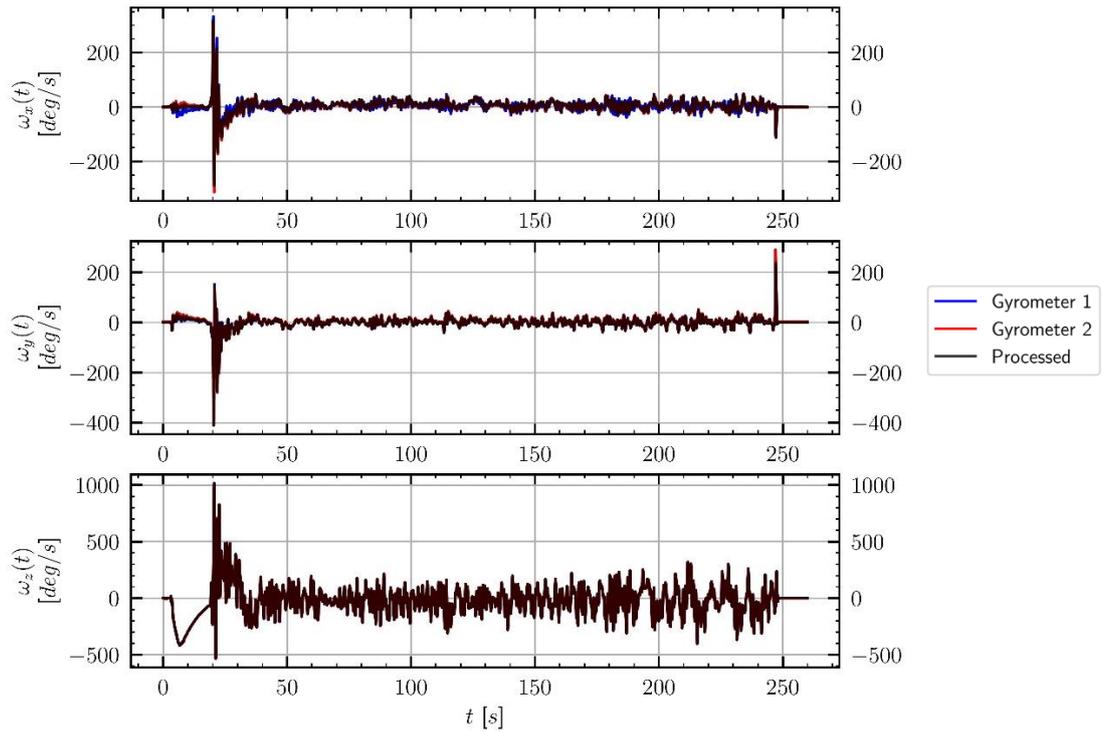


Figure 5.14 : Mesures fournies par les gyromètres lors du vol de la Fusex.

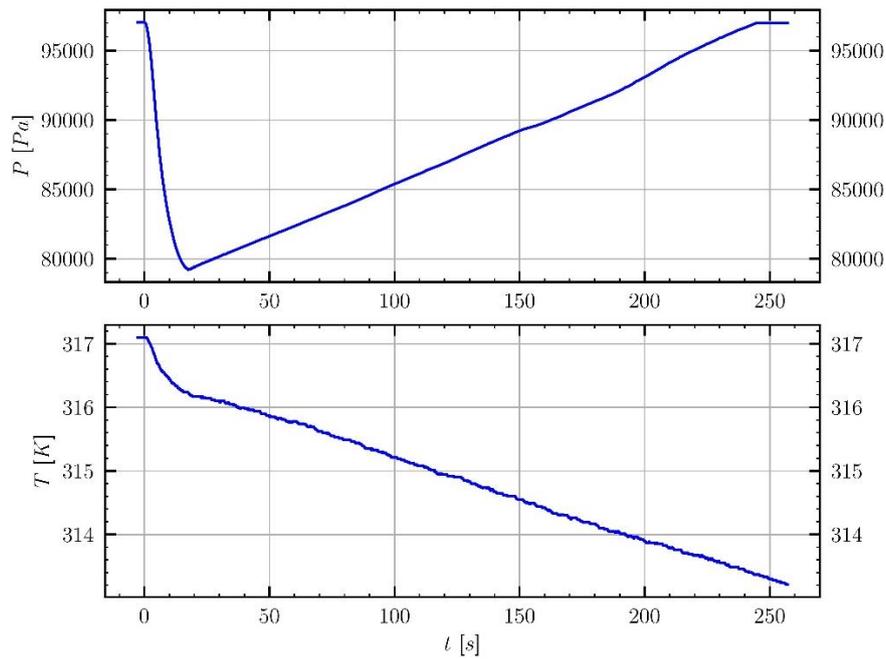


Figure 5.15 : Mesures fournies par le capteur de pression/température lors du vol de la Fusex.

5.2.1. Prétraitement des mesures inertielles

Afin de limiter l'impact des biais et bruits de mesures, deux centrales inertielles ont été intégrées au sein du module avionique. En considérant une série de $N = 30$ mesures en amont du lancement, il est possible de calculer la moyenne et l'écart type des mesures fournies par chacune des centrales :

$$\bar{\gamma} = \langle \gamma_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma_i \quad 5.63a$$

$$\sigma_\gamma = \langle \Delta \gamma_k^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\gamma_i - \langle \gamma_k \rangle)^2 \quad 5.63b$$

Et,

$$\bar{\omega} = \langle \omega_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i \quad 5.64a$$

$$\sigma_\omega = \langle \Delta \omega_k^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\omega_i - \langle \omega_k \rangle)^2 \quad 5.64b$$

Ainsi, en calculant ces valeurs lorsque la position et l'attitude de la Fusex sont fixes et connues (lors des quelques secondes suivant l'allumage du module avionique par exemple), il est possible de calculer la variance et la moyenne de l'erreur de mesure des capteurs :

$$\mathbf{b}_\gamma = \langle \gamma_k \rangle - \mathbf{g} \quad 5.65a$$

$$\mathbf{b}_\omega = \langle \omega_k \rangle - \mathbf{0} \quad 5.65b$$

Ainsi, les mesures de chacune des centrales inertielles peuvent être corrigée comme suit :

$$\gamma_c = \gamma_m - \mathbf{b}_\gamma \quad 5.66a$$

$$\omega_c = \omega_m - \mathbf{b}_\omega \quad 5.66b$$

Afin de simplifier davantage le problème de fusion des mesures des deux centrales, nous avons considéré la distance entre les points de mesures des centrales inertielles et le centre de gravité de la Fusex négligeable, ce qui nous permet d'écrire :

$$\gamma_f = \frac{(\gamma_{m,1} - \mathbf{b}_{\gamma,1})\sigma_{\gamma,2}^2 + (\gamma_{m,2} - \mathbf{b}_{\gamma,2})\sigma_{\gamma,1}^2}{\sigma_{\gamma,1}^2 + \sigma_{\gamma,2}^2} \quad 5.67a$$

$$\omega_f = \frac{(\omega_{m,1} - \mathbf{b}_{\omega,1})\sigma_{\omega,2}^2 + (\omega_{m,2} - \mathbf{b}_{\omega,2})\sigma_{\omega,1}^2}{\sigma_{\omega,1}^2 + \sigma_{\omega,2}^2} \quad 5.67b$$

La figure 5.16 présente les mesures brutes des centrales inertielles (rouge/bleu) et les mesures corrigées (en noir).

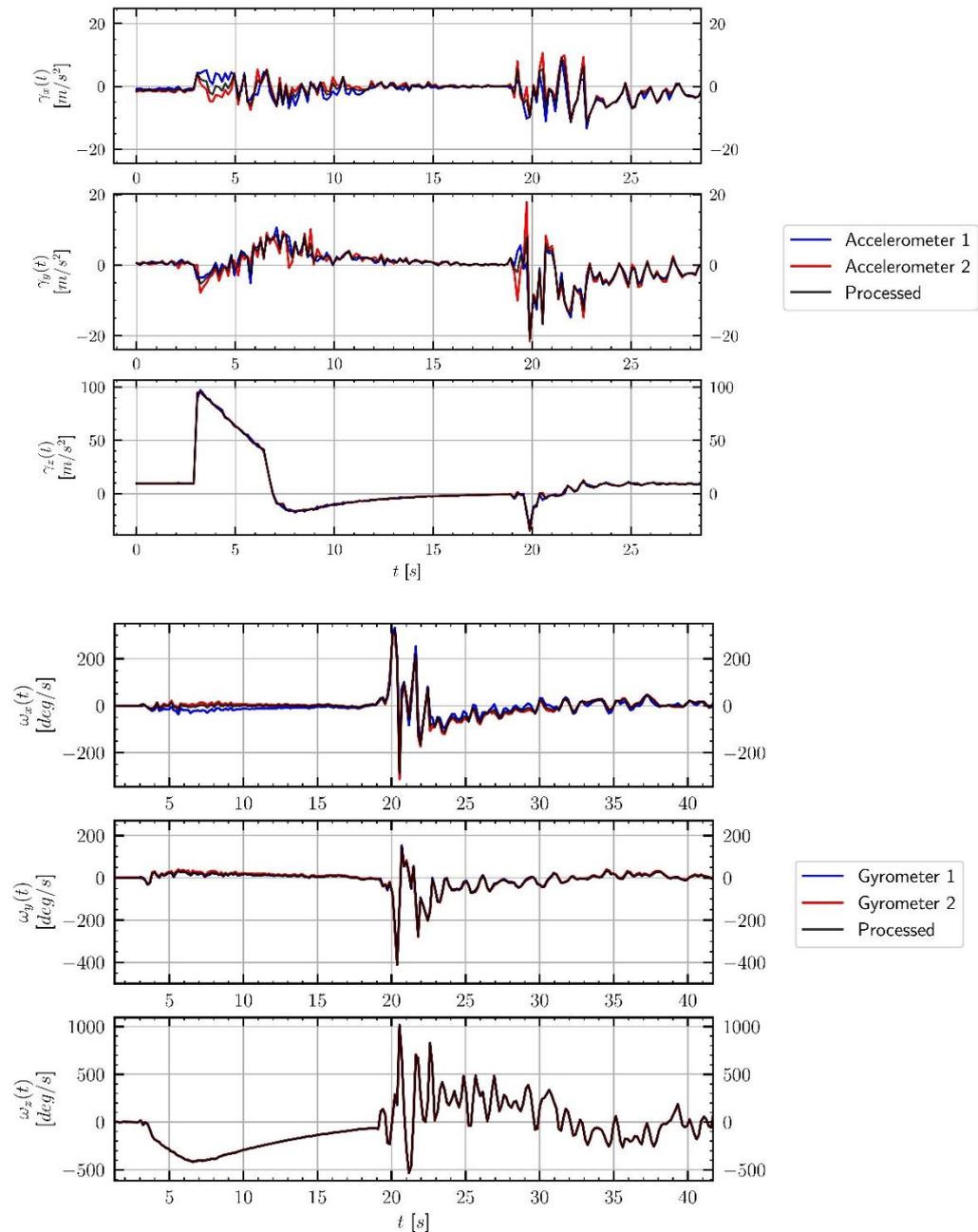


Figure 5.16 : Accélération et vitesse angulaire lors de la phase ascendante (0 – 20s).

Si nous portons une attention particulière aux premiers instants du vol, nous observons des asymétries de mesure sur les axes x et y des centrales inertielles. Nous attribuons cette asymétrie aux couplages inter-axes des capteurs, aux non-linéarités et à l'accélération d'entraînement des capteurs liée à l'excentration de ces derniers vis-à-vis du centre de gravité. En raison du positionnement symétrique des centrales autour de l'axe principal d'inertie de la Fusex, la moyenne des mesures des deux capteurs permet de réduire fortement ces écarts.

Toutefois, une étude approfondie de ce phénomène (calibration, modèle d'erreur, ...) est requise afin de limiter l'impact de ces mesures parasites sur l'estimation de l'attitude et de la position de la Fusex.

Après calibration des accéléromètres, il est possible d'estimer l'élévation initiale de la Fusex en appliquant la relation :

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2}}{\gamma_z} \quad 5.68$$

Ainsi, nous obtenons une élévation initiale de $\theta_0 = 82^\circ$.

5.2.2. Prétraitement des mesures de pression

Le modèle ISA utilisé lors de nos calculs et simulation est un modèle empirique fondé sur des valeurs moyennes de l'état de l'atmosphère terrestre. Ainsi, il est courant que les prédictions du modèle soient localement fortement éloignées de la réalité. En raison du fort écart entre la prédiction du modèle et les mesures de températures effectuées au cours du vol (Figure 5.15), nous avons décidé de simplement considérer les mesures de pressions afin de calculer l'altitude relative de la Fusex par rapport au sol.

La première étape de la démarche de correction consiste à calculer la pression atmosphérique théorique prédite par le modèle ISA au niveau du site de lancement. En considérant les coordonnées GPS 43°12'30.9"N 0°03'44.2"W, nous obtenons une altitude de 436m par rapport au géoïde de référence. A cette altitude, le modèle ISA prédit une pression $P_{ISA} = 96195.7 Pa$. Pour cette même altitude, le capteur fournit une valeur de pression $P_m = 97032.5 Pa$. Les écarts entre les valeurs théoriques et réelles sont dus à de nombreux facteurs ; tels que la température interne de la Fusex, la variabilité temporelle et spatiale naturelle de la pression et de la température par rapport à la valeur moyenne mondiale, ...

Ainsi, en considérant le biais entre la température/pression mesurée et les prédictions du modèle ISA comme constant (hypothèse justifiée par la courte durée du vol, la faible vitesse et la perméabilité de la Fusex), nous pouvons écrire

$$b_p = P_{ISA} - P_m \quad 5.69$$

Ce qui nous permet d'obtenir les mesures de pression corrigées :

$$P_c = P_m - b_p \quad 5.70$$

5.3. Résultats

L'application du filtre de Kalman développé précédemment aux mesures acquises lors du vol de la Fusex permettent l'obtention des résultats suivants :

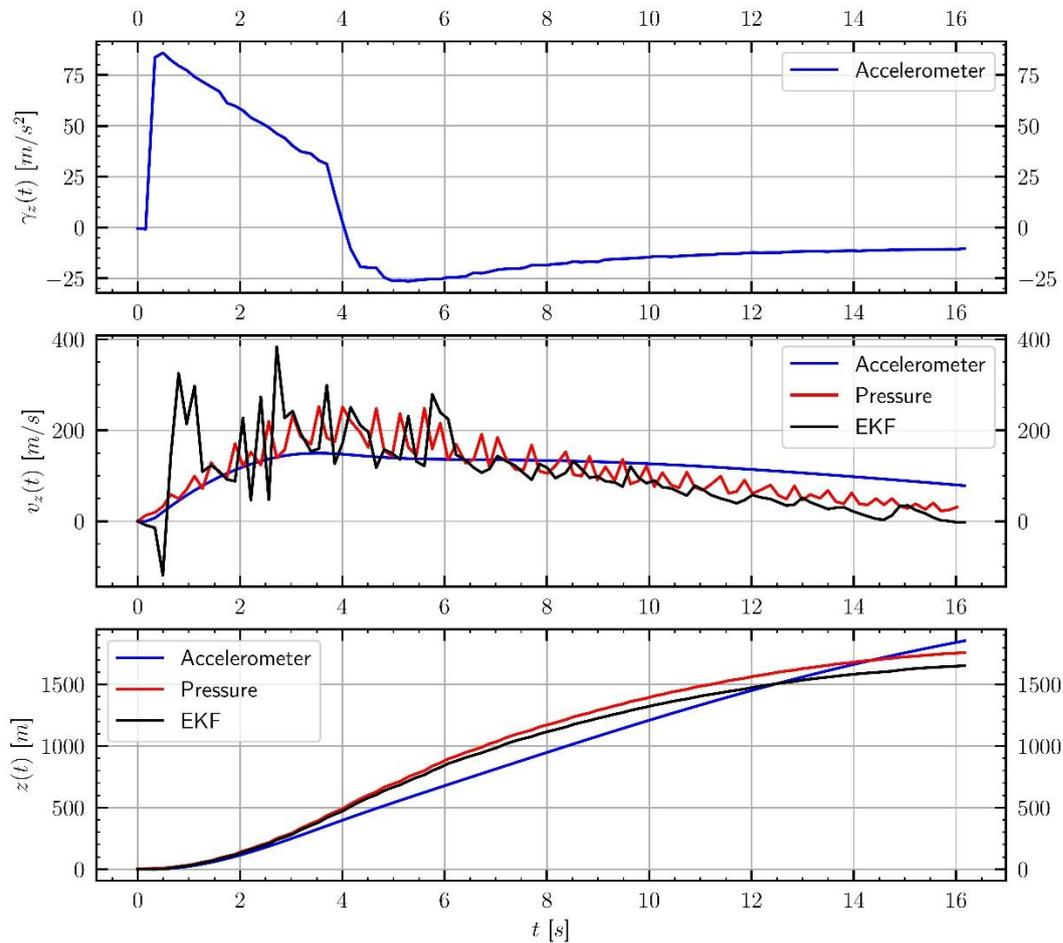


Figure 5.17 : résultats de l'application de l'algorithme d'estimation de l'altitude de la Fusex.

Ainsi, en combinant les mesures des centrales inertielles ainsi que les mesures de pression, nous obtenons une altitude de l'apogée de 1652m, ce qui est en accord avec les prédictions fournies par le modèle de vol inclus dans l'outil StabTraj (Figure 5.18). Nous pouvons observer que la culmination était estimée à 1667m, ce qui correspond donc à une différence de 15m, soit 0.9% d'erreur entre la valeur théorique et celle obtenue après traitement des données.

Ainsi, bien que le filtre de Kalman présenté soit un algorithme relativement simple, les résultats expérimentaux ainsi que des différentes simulations effectuées au cours de ce projet permettent de démontrer l'intérêt des filtres de Kalman afin d'estimer la trajectoire d'une fusée expérimentale.



TRAJECTO

Trajectographie de fusée

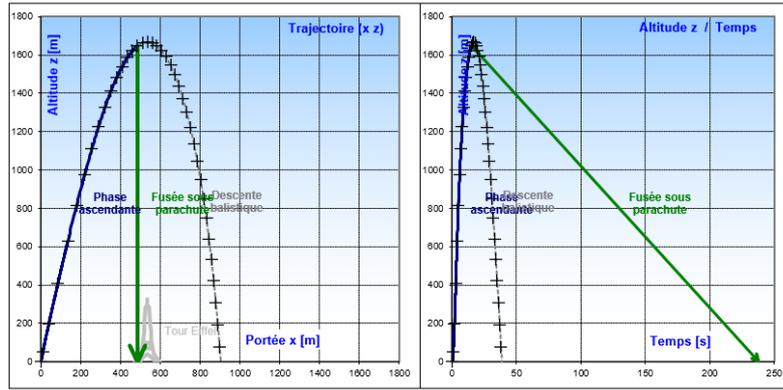
Remplir les cases jaunes

Fusée	
Nom	Promethee
Club	ESO
Masse totale	6,885 kg
Propulseur	Barasinga (Pro54-5G C)

Trainée Aérodynamique	
Surface Réf.	0,012464 m ²
Cx	0,5

Rampe de Lancement	
Longueur	4 m
Élévation	80 °
Altitude	0 m

Descente Sous Parachute	
Fusée	0 satellite
Masse	5,852 kg
Dépotage	N/A
Ouverture para	15 s
Surface para	1,72 m ²
Cx parachute	1
Vitesse du vent	5 m/s
Vitesse descente	7,4 m/s
Durée descente	223 s
Durée du vol	238 s
Déport latéral	± 1115 m



11/08/2022						
	Temps	Altitude z	Portée x	Vitesse	Accélération	Efforts
Sortie de Rampe				29,8 m/s		
Vit max & Acc max				235 m/s	120 m/s ²	
Culmination, Apogée	17,0 s	1667 m	535 m	24 m/s		
Ouverture parachute fusée	15,0 s	1647 m	485 m	32 m/s		1083,0 N
Impact balistique	38,7 s	~0 m	905 m	117,4 m/s		40361 J

Pour localiser la fusée	
Couleur fuselage/coiffe	Brun/Orange...
Couleur parachute fusée	Rouge...

propu O

Figure 5.18 : Prédictions du modèle de vol StabTraj.

5.4. Discussions et améliorations

La qualité des composants restant la principale barrière à l'estimation précise de la trajectoire, nous avons démontré la faisabilité d'un système permettant la fusion de plusieurs capteurs de qualité faible afin de reconstruire le vecteur d'état d'une fusée expérimentale. Au cours de ce projet, le pôle expérience a pu identifier de nombreux points clefs impactant fortement les performances globales des filtres :

- L'utilisation d'un magnétomètre est insuffisante afin de contraindre totalement l'attitude absolue de la Fusex (la rotation autour du vecteur B_G est non-observable). Il est ainsi nécessaire d'ajouter un deuxième vecteur fournissant une direction fixe dans le repère ENU. Dans notre exemple, nous avons utilisé le vecteur accélération de la pesanteur en supposant l'accélération absolue de la Fusex connue. L'estimation de l'accélération de la Fusex peut par exemple être effectuée à l'aide d'un modèle d'efforts (forces aérodynamiques, poussée, ...) permettant de déterminer les sources d'accélération autres que gravitationnelles. Il serait toutefois intéressant d'étudier d'autres solutions telles qu'un système permettant de déterminer la direction du soleil, du sol, ...
- Le GPS constitue un élément clef du système de trajectographie en fournissant le positionnement absolu de la Fusex dans l'espace. Il est donc primordial de s'assurer de son bon fonctionnement en amont du lancement.
- Nous avons montré qu'une faible fréquence d'échantillonnage des composants HF (IMU, pression, ...) n'est pas nécessaire afin d'obtenir une estimation de la trajectoire de relativement bonne qualité. Ainsi, il peut être intéressant de limiter la fréquence d'échantillonnage à 10Hz et d'utiliser plusieurs capteurs de même type (fusion simple des mesures eq. 5.67) afin de limiter les bruits et biais de mesure.

VI.- Tests et validation

Les tests mécaniques se sont passés sans encombre. La photo suivante présente l'ensemble des tests réalisés lors C'Space.

Masse avec propu vide 5,852		Simulation de vol		calcul auto	
Tenue mécanique		Site	80	80	45
masse d'un aileron	0,100 KG	Temps culmi (s)	17,0	17,0	12,0
superficie d'un aileron	25 438 mm ²	Altitude culmi (m)	1667	1667	803
flèche acceptable(mm)	18 mm	Vitesse culmi (m/s)	24,3	24,3	92,4
compression	1 249,9 N	Portée balistique (m)	905	905	2472
Resistance longitudinale d'un aileron	24,0 N	Vmax (m/s)	235,2	235,2	242,6
Resistance transversale d'un aileron	146,3 N	Accélération max (m/s ²)	120	120	123
		Cx	0,5	0,5	0,5
Pensez à modifier l'inclinaison pour avoir les 2 valeurs.					
Récupération					
<i>Ralentisseur</i>					
nombre de suspentes	4				
surface parachute	1,72000 m ²				
force à tester totale	620,0 N	63,2 KG			
force sur suspente	310,0 N	31,599 KG			
<i>Séparation latérale</i>					
masse au dessus case para	1,000 KG				
Force de compression	24,5 kg				
Compatibilité Rampe					
Résistance des patins	3,20 kg				

L'ajustement précis des bagues ainsi que l'utilisation du carbone permettent d'obtenir des résultats de mesure de flèche très satisfaisants. La flèche dynamique était de 4mm, ce qui est très inférieur à la valeur acceptable 18mm.

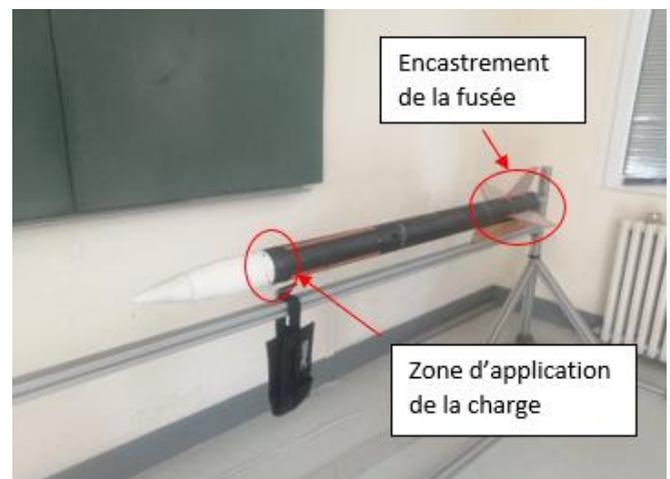


Figure 6.1 : Mesure de la flèche

Le test de compression est réalisé en se suspendant sur la fusée afin d'obtenir la valeur recherchée, dans notre cas 127kg. La mesure est réalisée par une balance.

Les tests mécaniques réalisés sur les ailerons en aluminium de 3mm d'épaisseur ont démontré que leur résistance est excellente. Dans une optique de gain de masse, Il serait intéressant d'utiliser des plaques de 2mm d'épaisseur. Néanmoins, il faut être particulièrement attentif vis-à-vis de l'orientation des ailerons, la tolérance imposée par Planète Sciences étant faible.

Comme mentionné dans la partie récupération, nous avons dû coller des morceaux de chambre à air sur les extrémités de la trappe afin de garantir son maintien en position lors du vol.



Figure 6.2 : Ajout d'une chambre à air autour de la trappe

Des tests de traction sont réalisés sur le parachute et les suspentes afin de vérifier leur résistance lors de l'éjection.

Pour l'ensemble des système électriques, il faut démontrer que leur autonomie est suffisamment importante car la fusée peut rester plusieurs heures sur le pas de tir.

Afin de valider le dispositif de récupération, il faut réaliser 3 éjections de parachute à la suite. Cela permet de prouver la fiabilité du système.

VII.- Campagne de lancement

1. La chronologie

La chronologie est un document détaillant l'ensemble des étapes à suivre afin d'installer la fusée lors de son lancement.

QUELQUES CONSEILS :

- Ecrire TOUTES les étapes du lancement, même les plus simples ; exemple : prendre une photo devant la fusée avant le lancement (on ne sait jamais dans quel état on peut la retrouver après le lancement)
- Le lancement étant une étape stressante, il est donc nécessaire de limiter le nombre de manipulation à effectuer. De plus, il est fortement déconseillé de démonter la fusée sur le pas de tir afin d'enclencher certains composants. Il faut donc prévoir des moyens détournés (trou, trappe etc...) afin que l'ensemble des éléments soient facilement accessibles. Dans notre cas, nous avons percé un trou de 8mm de diamètre afin d'enclencher l'interrupteur de l'expérience depuis la rampe de lancement
- S'entraîner 1 ou 2 fois afin de repérer d'éventuelles incohérences
- Il n'est pas nécessaire de trop se prendre la tête pour la durée de chaque étape car lors du lancement, les pyrotechniciens ont seulement besoin de savoir si la chronologie est « courte » ou « longue ». Dans notre cas, elle était courte
- Lors du lancement, un membre du groupe lit la chronologie à haute voix en s'assurant que son coéquipier réalise chaque action avec exactitude. Dans notre cas, Antoine lisait la chronologie et Tom faisait les manipulations

En guise d'exemple, voici la chronologie de notre lancement. Il est conseillé de s'en inspirer car les étapes réalisées sont très simples.

Check-list préparation lancement :

DEVANT LA RAMPE

Temps avant lancement	Action à effectuer	Nom du membre	Outil	Durée de l'action
H-30	Allumer l'expérience	Tom	Tournevis avec scotch électrique	6 min
H-24	Graisser le rail de la rampe	Tom		5 min
H-19	Mise en rampe de la fusée	Tom		2 min
H-17	Vérifier que la cordelette est solidement attachée au détrompeur	Tom		5 min
	Attacher la cordelette à la	Tom	Scotch	

	rampe en laissant du mou (nœud de 8)			
	Insérer le détrompeur dans la prise et vérifier en tirant dessus qu'il se détache convenablement sans faire bouger la prise	Tom	Détrompeur	
	Remettre le détrompeur	Tom		
	Vérifier que la sécurité est enclenchée	Tom		
	Allumer la minuterie, si la LED jaune s'allume, éteindre immédiatement	Tom		
	Vérifier le détrompeur	Tom		
	Vérifier que la LED rouge est allumée	Tom		
	Mettre la sécurité sur OFF	Tom		
	Scotcher les deux interrupteurs en position	Tom	Scotch rouge sur le côté de la minuterie	
H-13	Scotcher la clef de serrage du propulseur sur l'aileron	Tom	Clef à molette, scotch	30 sec
H-13	Eriger la rampe	Pyrotechiciens		2 min
H-11	Prendre les photos de groupe	Groupe		1 min
H-10	Déplacement vers la tente Jupiter	Groupe		
	Déroulement des opérations pyrotechniques	Pyrotechniciens		
H-0	Appuyer sur le bouton	Pyrotechniciens		

2. Quelques images



Figure 7.1 : Lancement de Prométhée - Photos : Alexis Moyart



Figure 7.2 : Déploiement du parachute - altitude estimée : 1667m - Photos : Alexis Moyart

Conclusion

Ce projet fut l'occasion de découvrir et perfectionner les procédés de fabrication d'une fusée expérimentale, au travers de la conception mécanique et la réalisation d'un système électrique complet. Le lancement de la fusée au C'Space constitue à lui seul l'aboutissement d'une année de travail acharné, marqué par l'état d'esprit irréprochable du groupe qui a permis de clore le programme Prométhée.

De nombreux succès ont marqué le développement de Prométhée :

- Le succès des tests mécaniques confirme l'excellente rigidité obtenue par la fabrication de cylindres en fibre de carbone, reliés avec des bagues parfaitement ajustées.
- Le dispositif de récupération, constitué d'un ressort compressé par une ventouse magnétique et un aimant permanent, a démontré sa robustesse ainsi que sa fiabilité. Le parachute de forme circulaire a permis de garantir la stabilité de la Fusex lors de sa descente avec succès. En effet, après l'éjection, il est courant que les fusées entrent dans une phase de rotation non contrôlée avant d'atteindre le sol, ce qui n'a pas été observé sur Prométhée.
- Malgré les nombreux problèmes rencontrés sur la minuterie en raison de la défaillance de certains composants clefs, le travail et l'adaptabilité de l'équipe a permis la construction d'une minuterie opérationnelle. Les recherches et le travail accomplis seront très utiles aux futurs projets de fusée expérimentale.
- L'acquisition des données atmosphériques et inertielles, couplées à un filtre de Kalman, a permis d'effectuer une première estimation de la trajectoire lors du lancement. Les résultats sont prometteurs car, malgré un dysfonctionnement du GPS, la différence entre l'altitude théorique (1667m) et celle mesurée (1652m) est de 15m, soit 0.9%. Les différentes simulations menées ont montré l'intérêt de l'utilisation d'un filtre de Kalman pour les applications de navigation et ouvrent la voie pour de futurs projets et expériences. Enfin, l'expérience de Prométhée constitue une base solide pour l'avionique du projet ESL (*Estaca Space Launcher*), dont l'objectif est de battre le record d'altitude atteint par une fusée étudiante. Afin de déclencher l'ouverture du parachute de cette fusée, un système de mesure de l'altitude, couplé à une minuterie permettra d'envoyer un signal électrique, une fois l'apogée atteinte.

Prométhée s'inscrit ainsi dans la continuité des objectifs long terme de l'ESO consistant à permettre la montée en compétence de ses membres au service de l'ESL.

Annexes

Annexe 1 :

Les valeurs du modèle atmosphérique de la Fusex sont les suivantes :

z [km]	T_0 [K]	T_z [K/km]	P_0 [Pa]
0.0	288.15	-6.5	101325
11.0	216.65	0.0	22632.1
20.0	216.65	1.0	5474.89
32.0	228.65	2.8	868.019
47.0	270.65	0	110.906

Source : US Standard Atmosphere, 1976, NOAA, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C.

Annexe 2 :

Les modèles d'évolution et de mesure non linéaires peuvent être mis sous la forme

$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k, \Delta t_k)$	A.2.1
$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, t_k, \Delta t_k)$	A.2.2

Il est possible de linéariser localement ces équations afin de permettre l'application directe des équations du filtre de Kalman. Cette linéarisation peut s'écrire au premier ordre :

$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k$	A.2.3
$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{u}_k$	A.2.4

Avec $F_{i,j}^k = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $B_{i,j}^k = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$, $H_{i,j}^k = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}$ et $D_{i,j}^k = \frac{\partial h_i}{\partial u_j}$. Ainsi, l'objectif de cette annexe est de fournir les expressions des termes non nuls des matrices \mathbf{F}_k , \mathbf{H}_k , \mathbf{B}_k et \mathbf{D}_k .

1. Modèle d'évolution linéarisé :

$$a. \mathbf{q}_0^{k+1} = \lambda_k \left[\mathbf{q}_0^k - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{q}_1^k (\omega_x^k - \Delta \omega_x^k) + \mathbf{q}_2^k (\omega_y^k - \Delta \omega_y^k) + \mathbf{q}_3^k (\omega_z^k - \Delta \omega_z^k)) \right]$$

Matrice de transition

$F_{1,1} = \lambda_k$
$F_{1,2} = \lambda_k (\Delta \omega_x^k - \omega_x^k) \frac{\Delta t}{2}$



$F_{1,3} = \lambda_k (\Delta\omega_y^k - \omega_y^k) \frac{\Delta t}{2}$
$F_{1,4} = \lambda_k (\Delta\omega_z^k - \omega_z^k) \frac{\Delta t}{2}$
$F_{1,14} = \lambda_k q_1^k \frac{\Delta t}{2}$
$F_{1,15} = \lambda_k q_2^k \frac{\Delta t}{2}$
$F_{1,16} = \lambda_k q_3^k \frac{\Delta t}{2}$

Matrice des entrées

$B_{1,1} = -\lambda_k q_1^k \frac{\Delta t}{2}$
$B_{1,2} = -\lambda_k q_2^k \frac{\Delta t}{2}$
$B_{1,3} = -\lambda_k q_3^k \frac{\Delta t}{2}$

$$\mathbf{b.} \quad \mathbf{q}_1^{k+1} = \lambda_k \left[\mathbf{q}_{1,k}^k + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{q}_0^k (\omega_x^k - \Delta\omega_x^k) - \mathbf{q}_3^k (\omega_y^k - \Delta\omega_y^k) + \mathbf{q}_2^k (\omega_z^k - \Delta\omega_z^k)) \right]$$

Matrice de transition

$F_{2,1} = \lambda_k (\omega_x^k - \Delta\omega_x^k) \frac{\Delta t}{2}$
$F_{2,2} = \lambda_k$
$F_{2,3} = \lambda_k (\omega_z^k - \Delta\omega_z^k) \frac{\Delta t}{2}$
$F_{2,4} = \lambda_k (\Delta\omega_y^k - \omega_y^k) \frac{\Delta t}{2}$
$F_{2,11} = -\lambda_k q_0^k \frac{\Delta t}{2}$
$F_{2,12} = \lambda_k q_3^k \frac{\Delta t}{2}$
$F_{2,13} = -\lambda_k q_2^k \frac{\Delta t}{2}$

Matrice des entrées

$B_{1,1} = \lambda_k q_0^k \frac{\Delta t}{2}$
$B_{1,2} = -\lambda_k q_3^k \frac{\Delta t}{2}$



$$B_{1,3} = \lambda_k q_2^k \frac{\Delta t}{2}$$

$$\mathbf{a.} \quad \mathbf{q}_2^{k+1} = \lambda_k \left[\mathbf{q}_2^k + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{q}_3^k (\omega_x^k - \Delta \omega_x^k) + \mathbf{q}_0^k (\omega_y^k - \Delta \omega_y^k) - \mathbf{q}_1^k (\omega_z^k - \Delta \omega_z^k)) \right]$$

Matrice de transition

$$F_{4,1} = \lambda_k (\omega_y^k - \Delta \omega_y^k) \frac{\Delta t}{2}$$

$$F_{4,2} = \lambda_k (\Delta \omega_z^k - \omega_z^k) \frac{\Delta t}{2}$$

$$F_{4,3} = \lambda_k$$

$$F_{4,4} = \lambda_k (\omega_x^k - \Delta \omega_x^k) \frac{\Delta t}{2}$$

$$F_{4,11} = -\lambda_k q_3^k \frac{\Delta t}{2}$$

$$F_{4,12} = -\lambda_k q_0^k \frac{\Delta t}{2}$$

$$F_{4,13} = \lambda_k q_1^k \frac{\Delta t}{2}$$

Matrice des entrées

$$B_{4,1} = \lambda_k q_3^k \frac{\Delta t}{2}$$

$$B_{4,2} = \lambda_k q_0^k \frac{\Delta t}{2}$$

$$B_{4,3} = -\lambda_k q_1^k \frac{\Delta t}{2}$$

$$\mathbf{b.} \quad \mathbf{q}_3^{k+1} = \lambda_k \left[\mathbf{q}_3^k + \frac{\Delta t}{2} (-\mathbf{q}_2^k (\omega_x^k - \Delta \omega_x^k) + \mathbf{q}_1^k (\omega_y^k - \Delta \omega_y^k) + \mathbf{q}_0^k (\omega_z^k - \Delta \omega_z^k)) \right]$$

Matrice de transition

$$F_{4,1} = \lambda_k (\omega_z^k - \Delta \omega_z^k) \frac{\Delta t}{2}$$

$$F_{4,2} = \lambda_k (\omega_y^k - \Delta \omega_y^k) \frac{\Delta t}{2}$$

$$F_{4,3} = \lambda_k (\Delta \omega_x^k - \omega_x^k) \frac{\Delta t}{2}$$

$$F_{4,4} = \lambda_k$$

$$F_{4,11} = \lambda_k q_2^k \frac{\Delta t}{2}$$



$F_{4,12} = -\lambda_k q_1^k \frac{\Delta t}{2}$
$F_{4,13} = \lambda_k q_0^k \frac{\Delta t}{2}$

Matrice des entrées

$B_{4,1} = -\lambda_k q_2^k \frac{\Delta t}{2}$
$B_{4,2} = \lambda_k q_1^k \frac{\Delta t}{2}$
$B_{4,3} = -\lambda_k q_0^k \frac{\Delta t}{2}$

c. $x_L^{k+1} = x_L^k + v_{x,L}^k \Delta t$

Matrice de transition

$F_{8,8} = 1$
$F_{8,11} = \Delta t$

d. $y_L^{k+1} = y_L^k + v_{y,L}^k \Delta t$

Matrice de transition

$F_{9,9} = 1$
$F_{9,12} = \Delta t$

e. $z_L^{k+1} = z_L^k + v_{z,L}^k \Delta t$

Matrice de transition

$F_{10,10} = 1$
$F_{10,13} = \Delta t$

f. $v_{x,L}^{k+1} = v_{x,L}^k + \left(M_{11}^k (\gamma_x^k - \Delta \gamma_x^k) + M_{12}^k (\gamma_y^k - \Delta \gamma_y^k) + M_{13}^k (\gamma_z^k - \Delta \gamma_z^k) \right) \Delta t$

Matrice de transition

$F_{11,1} = 2 \left(q_0^k (\gamma_x^k - \Delta \gamma_x^k) + q_3^k (\gamma_y^k - \Delta \gamma_y^k) - q_2^k (\gamma_z^k - \Delta \gamma_z^k) \right) \Delta t$



$F_{11,2} = 2 \left(q_1^k (\gamma_x^k - \Delta\gamma_x^k) + q_2^k (\gamma_y^k - \Delta\gamma_y^k) + q_3^k (\gamma_z^k - \Delta\gamma_z^k) \right) \Delta t$
$F_{11,3} = 2 \left(-q_2^k (\gamma_x^k - \Delta\gamma_x^k) + q_1^k (\gamma_y^k - \Delta\gamma_y^k) - q_0^k (\gamma_z^k - \Delta\gamma_z^k) \right) \Delta t$
$F_{11,4} = 2 \left(-q_3^k (\gamma_x^k - \Delta\gamma_x^k) + q_0^k (\gamma_y^k - \Delta\gamma_y^k) + q_1^k (\gamma_z^k - \Delta\gamma_z^k) \right) \Delta t$
$F_{11,11} = 1$
$F_{11,14} = \left(-(q_0^k)^2 - (q_1^k)^2 + (q_2^k)^2 + (q_3^k)^2 \right) \Delta t$
$F_{11,15} = -2(q_0^k q_3^k + q_1^k q_2^k) \Delta t$
$F_{11,16} = 2(q_0^k q_2^k - q_1^k q_3^k) \Delta t$

Matrice des entrées

$F_{11,4} = \left((q_0^k)^2 + (q_1^k)^2 - (q_2^k)^2 - (q_3^k)^2 \right) \Delta t$
$F_{11,5} = 2(q_0^k q_3^k + q_1^k q_2^k) \Delta t$
$F_{11,6} = 2(q_1^k q_3^k - q_0^k q_2^k) \Delta t$

$$g. \mathbf{v}_{y,L}^{k+1} = \mathbf{v}_{y,L}^k + \left(\mathbf{M}_{21}^k (\gamma_x^k - \Delta\gamma_x^k) + \mathbf{M}_{22}^k (\gamma_y^k - \Delta\gamma_y^k) + \mathbf{M}_{23}^k (\gamma_z^k - \Delta\gamma_z^k) \right) \Delta t$$

Matrice de transition

$F_{12,1} = 2 \left(-q_3^k (\gamma_x^k - \Delta\gamma_x^k) + q_0^k (\gamma_y^k - \Delta\gamma_y^k) + q_1^k (\gamma_z^k - \Delta\gamma_z^k) \right) \Delta t$
$F_{12,2} = 2 \left(q_2^k (\gamma_x^k - \Delta\gamma_x^k) - q_1^k (\gamma_y^k - \Delta\gamma_y^k) + q_0^k (\gamma_z^k - \Delta\gamma_z^k) \right) \Delta t$
$F_{12,3} = 2 \left(q_1^k (\gamma_x^k - \Delta\gamma_x^k) + q_2^k (\gamma_y^k - \Delta\gamma_y^k) + q_3^k (\gamma_z^k - \Delta\gamma_z^k) \right) \Delta t$
$F_{12,4} = 2 \left(-q_0^k (\gamma_x^k - \Delta\gamma_x^k) - q_3^k (\gamma_y^k - \Delta\gamma_y^k) + q_2^k (\gamma_z^k - \Delta\gamma_z^k) \right) \Delta t$
$F_{12,12} = 1$
$F_{12,14} = 2(q_0^k q_3^k - q_1^k q_2^k) \Delta t$
$F_{12,15} = -2 \left((q_0^k)^2 - (q_1^k)^2 + (q_2^k)^2 - (q_3^k)^2 \right) \Delta t$
$F_{12,16} = -2(q_0^k q_1^k + q_2^k q_3^k) \Delta t$



Matrice des entrées

$F_{12,4} = 2(q_1^k q_2^k - q_0^k q_3^k) \Delta t$
$F_{12,5} = 2 \left((q_0^k)^2 - (q_1^k)^2 + (q_2^k)^2 - (q_3^k)^2 \right) \Delta t$
$F_{12,6} = 2(q_0^k q_1^k + q_2^k q_3^k) \Delta t$

$$h. \mathbf{v}_{z,L}^{k+1} = \mathbf{v}_{z,L}^k + \left(\mathbf{M}_{31}^k (\gamma_x^k - \Delta \gamma_x^k) + \mathbf{M}_{32}^k (\gamma_y^k - \Delta \gamma_y^k) + \mathbf{M}_{33}^k (\gamma_z^k - \Delta \gamma_z^k) \right) \Delta t$$

Matrice de transition

$F_{13,1} = 2 \left(q_2^k (\gamma_x^k - \Delta \gamma_x^k) - q_1^k (\gamma_y^k - \Delta \gamma_y^k) + q_0^k (\gamma_z^k - \Delta \gamma_z^k) \right) \Delta t$
$F_{13,2} = 2 \left(q_3^k (\gamma_x^k - \Delta \gamma_x^k) - q_0^k (\gamma_y^k - \Delta \gamma_y^k) - q_1^k (\gamma_z^k - \Delta \gamma_z^k) \right) \Delta t$
$F_{13,3} = 2 \left(q_0^k (\gamma_x^k - \Delta \gamma_x^k) + q_3^k (\gamma_y^k - \Delta \gamma_y^k) - q_2^k (\gamma_z^k - \Delta \gamma_z^k) \right) \Delta t$
$F_{13,4} = 2 \left(q_1^k (\gamma_x^k - \Delta \gamma_x^k) + q_2^k (\gamma_y^k - \Delta \gamma_y^k) + q_3^k (\gamma_z^k - \Delta \gamma_z^k) \right) \Delta t$
$F_{13,13} = 1$
$F_{13,14} = -2(q_0^k q_2^k + q_1^k q_3^k) \Delta t$
$F_{13,15} = 2(q_0^k q_1^k - q_2^k q_3^k) \Delta t$
$F_{13,16} = -2 \left((q_0^k)^2 - (q_1^k)^2 - (q_2^k)^2 + (q_3^k)^2 \right) \Delta t$

Matrice des entrées

$F_{13,4} = 2(q_0^k q_2^k + q_1^k q_3^k) \Delta t$
$F_{13,5} = 2(q_2^k q_3^k - q_0^k q_1^k) \Delta t$
$F_{13,6} = 2 \left((q_0^k)^2 - (q_1^k)^2 - (q_2^k)^2 + (q_3^k)^2 \right) \Delta t$

$$i. \Delta \omega_x^{k+1} = \Delta \omega_x^k$$

Matrice de transition

$F_{14,14} = 1$

$$j. \Delta \omega_y^{k+1} = \Delta \omega_y^k$$



Matrice de transition

$$F_{15,15} = 1$$

$$\mathbf{k.} \quad \Delta\omega_z^{k+1} = \Delta\omega_z^k$$

Matrice de transition

$$F_{16,16} = 1$$

$$\mathbf{l.} \quad \Delta\gamma_x^{k+1} = \Delta\gamma_x^k$$

Matrice de transition

$$F_{17,17} = 1$$

$$\mathbf{m.} \quad \Delta\gamma_y^{k+1} = \Delta\gamma_y^k$$

Matrice de transition

$$F_{18,18} = 1$$

$$\mathbf{n.} \quad \Delta\gamma_z^{k+1} = \Delta\gamma_z^k$$

Matrice de transition

$$F_{19,19} = 1$$

$$\mathbf{o.} \quad \Delta m_x^{k+1} = \Delta m_x^k$$

Matrice de transition

$$F_{20,20} = 1$$

$$\mathbf{p.} \quad \Delta m_y^{k+1} = \Delta m_y^k$$

Matrice de transition

$$F_{21,21} = 1$$

$$\mathbf{q.} \quad \Delta m_z^{k+1} = \Delta m_z^k$$

Matrice de transition



$$F_{22,22} = 1$$

r. $\Delta P^{k+1} = \Delta P^k$

Matrice de transition

$$F_{23,23} = 1$$

s. $\Delta T^{k+1} = \Delta T^k$

Matrice de transition

$$F_{24,24} = 1$$

2. Modèle de mesure linéarisé :

a. $\lambda_{GPS}^k = \text{to_longitude}(x_L^k, y_L^k)$

Supposons que la valeur mesurée z_j^k soit une fonction à n variables d'état θ_i tel que

$$z_j^k = f_j(\theta_1^k, \theta_2^k, \dots, \theta_i^k + d\theta_i^k, \dots, \theta_n^k) \quad \text{A.2.4}$$

La linéarisation de cette fonction peut s'effectuer à l'aide d'un calcul aux différences finies. En posant $d\theta_i^k$ un déplacement infinitésimal (dans la pratique, il est par exemple envisageable de prendre $d\theta_i^k \sim 10^{-4} \cdot \theta_i^k$), il est possible de calculer

$$\frac{\partial z_j^k}{\partial \theta_i^k} = \frac{f(\theta_1^k, \theta_2^k, \dots, \theta_i^k + d\theta_i^k, \dots, \theta_n^k) - f(\theta_1^k, \theta_2^k, \dots, \theta_i^k - d\theta_i^k, \dots, \theta_n^k)}{2d\theta_i^k} \quad \text{A.2.4}$$

En raison de la nécessité d'effectuer un calcul récursif afin de calculer λ_{GPS}^k , il est nécessaire de calculer :

$$H_{1,1} = \frac{\partial \lambda_{GPS}^k}{\partial x_L^k} = \frac{\text{to_longitude}(x_L^k + dx_L^k, y_L^k) - \text{to_longitude}(x_L^k - dx_L^k, y_L^k)}{2dx_L^k} \quad \text{A.2.4}$$

Et

$$H_{1,2} = \frac{\partial \lambda_{GPS}^k}{\partial y_L^k} = \frac{\text{to_longitude}(x_L^k, y_L^k + dy_L^k) - \text{to_longitude}(x_L^k, y_L^k - dy_L^k)}{2dy_L^k} \quad \text{A.2.4}$$

b. $\phi_{GPS}^k = \text{to_latitude}(x_L^k, y_L^k)$



Pour les mêmes raisons que précédemment, il est nécessaire de calculer

$H_{2,1} = \frac{\partial \phi_{GPS}^k}{\partial x_L^k} = \frac{\text{to_latitude}(x_L^k + dx_L^k, y_L^k) + \text{to_latitude}(x_L^k - dx_L^k, y_L^k)}{2dx_L^k}$	A.2.4
--	-------

Et

$H_{2,2} = \frac{\partial \phi_{GPS}^k}{\partial y_L^k} = \frac{\text{to_latitude}(x_L^k, y_L^k + dy_L^k) + \text{to_latitude}(x_L^k, y_L^k - dy_L^k)}{2dy_L^k}$	A.2.4
--	-------

c. $z_{GPS}^k = z_L^k$

$H_{3,3} = 1$

d. $m_x^k = M_{11}^k \cos \delta_m \sin \sigma_m + M_{21}^k \cos \delta_m \cos \sigma_m - M_{31}^k \sin \delta_m + \Delta m_x^k$

$H_{4,1} = 2(q_0^k \cos \delta_m \sin \sigma_m + q_3^k \cos \delta_m \cos \sigma_m - q_2^k \sin \delta_m)$
$H_{4,2} = 2(q_1^k \cos \delta_m \sin \sigma_m + q_2^k \cos \delta_m \cos \sigma_m + q_3^k \sin \delta_m)$
$H_{4,3} = 2(-q_2^k \cos \delta_m \sin \sigma_m + q_1^k \cos \delta_m \cos \sigma_m - q_0^k \sin \delta_m)$
$H_{4,4} = 2(-q_3^k \cos \delta_m \sin \sigma_m + q_0^k \cos \delta_m \cos \sigma_m + q_1^k \sin \delta_m)$
$H_{4,17} = 1$

e. $m_y^k = M_{12}^k \cos \delta_m \sin \sigma_m + M_{22}^k \cos \delta_m \cos \sigma_m - M_{32}^k \sin \delta_m + \Delta m_y^k$

$H_{5,1} = 2(-q_3^k \cos \delta_m \sin \sigma_m + q_0^k \cos \delta_m \cos \sigma_m + q_1^k \sin \delta_m)$
$H_{5,2} = 2(q_2^k \cos \delta_m \sin \sigma_m - q_1^k \cos \delta_m \cos \sigma_m + q_0^k \sin \delta_m)$
$H_{5,3} = 2(q_1^k \cos \delta_m \sin \sigma_m + q_2^k \cos \delta_m \cos \sigma_m + q_3^k \sin \delta_m)$
$H_{5,4} = 2(-q_0^k \cos \delta_m \sin \sigma_m - q_3^k \cos \delta_m \cos \sigma_m + q_2^k \sin \delta_m)$
$H_{5,18} = 1$

f. $m_z^k = M_{13}^k \cos \delta_m \sin \sigma_m + M_{23}^k \cos \delta_m \cos \sigma_m - M_{33}^k \sin \delta_m + \Delta m_z^k$

$H_{6,1} = 2(q_2^k \cos \delta_m \sin \sigma_m - q_1^k \cos \delta_m \cos \sigma_m + q_0^k \sin \delta_m)$
--



$$H_{6,2} = 2(q_3^k \cos \delta_m \sin \sigma_m - q_0^k \cos \delta_m \cos \sigma_m - q_1^k \sin \delta_m)$$

$$H_{6,3} = 2(q_0^k \cos \delta_m \sin \sigma_m + q_3^k \cos \delta_m \cos \sigma_m - q_2^k \sin \delta_m)$$

$$H_{6,4} = 2(q_1^k \cos \delta_m \sin \sigma_m + q_2^k \cos \delta_m \cos \sigma_m + q_3^k \sin \delta_m)$$

$$H_{6,19} = 1$$

a. $T^k = \text{ISA_Temperature}(z_L^k) - \Delta T^k$

Par définition, la température conformément au modèle ISA s'écrit en fonction du gradient vertical de température $\partial T(z_L^k) / \partial z_L^k$. Ainsi, il est possible de récupérer la valeur de ce gradient afin de linéariser l'expression de la température :

$$H_{7,7} = \left. \frac{\partial T(z_L^k)}{\partial z_L^k} \right|_{ISA}$$

$$H_{7,20} = 1$$

b. $P^k = \text{ISA_Pressure}(z_L^k) - \Delta P^k$

De meme, il est possible de linéariser l'équation de pression du modèle de mesure :

$$H_{8,7} = -P^k \left[\frac{r}{g} \left(T_0(z_L^k) + \left. \frac{\partial T(z_L^k)}{\partial z_L^k} \right|_{ISA} \cdot z_L^k \right) \right]^{-1}$$

$$H_{8,21} = 1$$

